Ernesto Rosa Neto

DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

editora ática

Ernesto Rosa Neto

Professor de Prática de Ensino da Matemática, História da Ciência e Matemática da Universidade Mackenzie

Coordenador do Departamento de Vídeo do Colégio Anglo-Latino

Ex-professor de Matemática, História da Matemática e Prática de Ensino da Universidade de São Paulo

Dez anos de participação em programas educativos da Rádio e Televisão Cultura (RTC) de São Paulo

5.38-

DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

Elisa 11.989

editora ática

Supervisão editorial: João Guizzo
Coordenação da edição: Wilma Silveira Rosa de Moura
Redação: Leonardo Chianca
Preparação de originais: Remberto Francisco Kuhnen
Ilustração: Carlos Roberto de Carvalho
Eduardo Seiji Seki
Capa: Paulo César Pereira
Ary Normanha
Produção gráfica: Graphic Design

ISBN 85 08 01922 x

1987

R. Barão de Iguape, 110 — Tel.: PABX 278-9322
C. Postal 8656 — End. Telegráfico "Bomlivro" — S. Paulo

Apresentação

Quando estamos aprendendo um instrumento musical, é inevitável que dediquemos a maior parte do tempo a exercícios mecânicos e repetitivos. Há porém momentos de criação e interpretação, como quando estamos "tirando" uma música nova ou executando uma peça que já aprendemos bem.

Todas as nossas aprendizagens são mais ou menos marcadas por essas duas etapas: a da pura repetição, do treino, e a da criatividade. O que muda é a ênfase dada a cada uma delas.

O ensino tradicional estava mais centrado na memória: era preciso decorar tudo, ficar repetindo exaustivamente os mesmos tipos de exercício. Já o ensino renovado pendeu para o extremo oposto. O que procuramos, neste livro, é a síntese dos dois momentos, dando oportunidade para o professor dosar adequadamente memória, lógica e criatividade.

A maioria das atividades que propomos são de treinamento, com exercícios que vão dos mais fáceis aos mais complexos. Mas no momento de abordar um assunto novo, nossa proposta é que isso seja feito por redescoberta, partindo sempre do concreto para o abstrato. É nessa linha que apresentamos atividades diferenciadas em Aritmética e Geometria.

O livro trata também de temas básicos, quase sempre polêmicos: Antropologia com história da Matemática; Piaget com suas etapas psicogenéticas; paralelismo entre Antropologia e teorias de Piaget utilizando a lei de Muller; Bloom com suas categorias de objetivos educacionais; Dienes com a Matemática do concreto para o abstrato. Todos esses assuntos foram abordados por sua utilidade e fecundidade para o magistério. A polêmica permanece, as teorias evoluem. As mudanças se dão de maneira cada vez mais rápida. Por isso, o professor precisa instrumentalizar-se com uma base sólida de conhecimentos, técnicas e métodos de ensino que lhe permitam crescer, adaptar-se, ser atuante.

Nossa intenção é contribuir para a formação desse tipo de professor. As críticas a esta obra, no sentido de fazê-la aproximar-se cada vez mais desse objetivo, serão sempre bem-vindas.

O Autor

Esta obra é dedicada a minha filha Isabela que acaba de nascer e, quem sabe, terá um ambiente e uma escola fecundos, que darão espaço à nova geração para desenvolver suas imensas potencialidades na construção de um caminho feliz.

Índice

História da Matemática

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Contar a história da disciplina que está sendo estudada pode ser uma forma de ilustrar as aulas e motivar os alunos. Assim, também o professor de Matemática pode e deve lançar mão desse recurso, apresentando à classe fatos interessantes sobre a vida de matemáticos famosos, bem como descobertas e curiosidades nessa área do conhecimento.

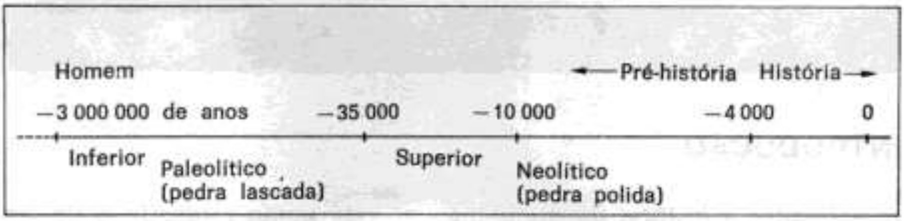
Esse tipo de história da Matemática é encontrada ao longo deste livro. Ele é importante e útil, desde que se tome o cuidado de não valorizar em demasia tais estudiosos e seus feitos notáveis a ponto de anular o papel da sociedade. Neste capítulo, porém, será mostrada uma história que vai bem além desse enfoque. Trata-se de uma *história social* da Matemática, que coloca essa ciência como algo humano, um fato social, resultado da colaboração de todos, e que é estritamente ligada às necessidades sociais.

Essa visão da Matemática tem maior utilidade na formação do professor do que diretamente na preparação de suas aulas. Esse capítulo deve ser lido várias vezes. Seus dois objetivos principais são: mostrar o longo caminho percorrido pela humanidade em três milhões de anos de existência, ajudando a perceber as transformações que ocorreram e continuam a ocorrer, alterando a sociedade e a própria personalidade do homem, e depois fazer uma comparação entre essa história e a evolução da própria criança.

A MATEMÁTICA: UMA HISTÓRIA SOCIAL

A Matemática foi inventada e vem sendo desenvolvida pelo homem em função de necessidades sociais.

Durante todo o Paleolítico inferior, que durou cerca de três milhões de anos, o homem viveu da caça e da coleta, competindo com os outros animais, só que utilizando paus, pedras e o fogo. Ele necessitava apenas das noções de *mais-menos*, *maior-menor* e algumas *formas* no lascamento de pedras e na confecção de porretes.



O Paleolítico superior é caracterizado por instrumentos mais elaborados para caça e coleta: armadilhas, redes, cestos, arcos e flechas, roupas de peles, canoas. Os homens utilizam novos materiais, além de paus e pedras: ossos, peles, cipós, fibras. Fazem pinturas e esculturas naturalistas. Já necessitam de muitos números e figuras. Para fazer um cesto é necessária a contagem e noções intuitivas de paralelismo e perpendicularismo. Surgem os desenhos geométricos e a pictografia.

Vênus de Willendorf (Áustria). Escultura naturalista em pedra, feita pelo homem do Paleolítico superior.

O domínio do homem sobre a natureza se estabelece com a domesticação de plantas e animais. É a revolução do Neolítico, o início da agricultura e da pecuária, que irá libertar o homem da necessidade da caça e coleta e da competição com os outros animais, além de fixá-lo a um mesmo lugar enquanto a terra é capaz de produzir. Os continentes tomam a forma atual.

O tempo passa e novos conhecimentos são incorporados por tentativa e erro: conhecimentos sobre terras e fertilidade, sementes, técnicas de plantio e colheita, datação do plantio, seleção. Os rebanhos precisam ser contados, são elaborados calendários agrícolas, o armazenamento de grãos e o cozimento criam a necessidade da cerâmica. A Matemática se desenvolve. A massa de conhecimentos se expande, no sentido de um saber prático, constituído de receitas úteis, que funcionam.

Vaso de cerâmica pré-histórico com desenhos geométricos, recolhido num sítio arqueológico em Presidente Epitácio, São Paulo.

No início do Neolítico a produção era muito pequena, e os homens continuavam extremamente dependentes da natureza. Aos poucos, com novas técnicas, foram aumentando a produção até atingirem o suprimento de suas necessidades. O Neolítico é o período que vai do início da produção até o ponto de os homens gerarem o necessário para a sobrevivência. A caça transformou-se em esporte. O Neolítico durou perto de seis mil anos.

Nova grande revolução é a passagem para o período histórico.

As tribos se estabelecem em campos permanentes nas margens de grandes rios. Com lugar fixo, as choupanas são transformadas em casas; as aldeias, em cidades, supondo projetos e medidas.

Surgem as classes sociais, a propriedade, o Estado, a escrita fonética. Todas essas mudanças foram causadas pelo aumento da produção, que chegou ao ponto de gerar mais que o necessário: produção de excedentes. Surgem as necessidades de armazenamento de produtos em grande escala e de sua contabilização, desenvolvendo muito mais a Matemática.

A sociedade fica muito mais complexa, a cultura se acumula, mas sempre com um sentido prático, ligada ao dia-a-dia.

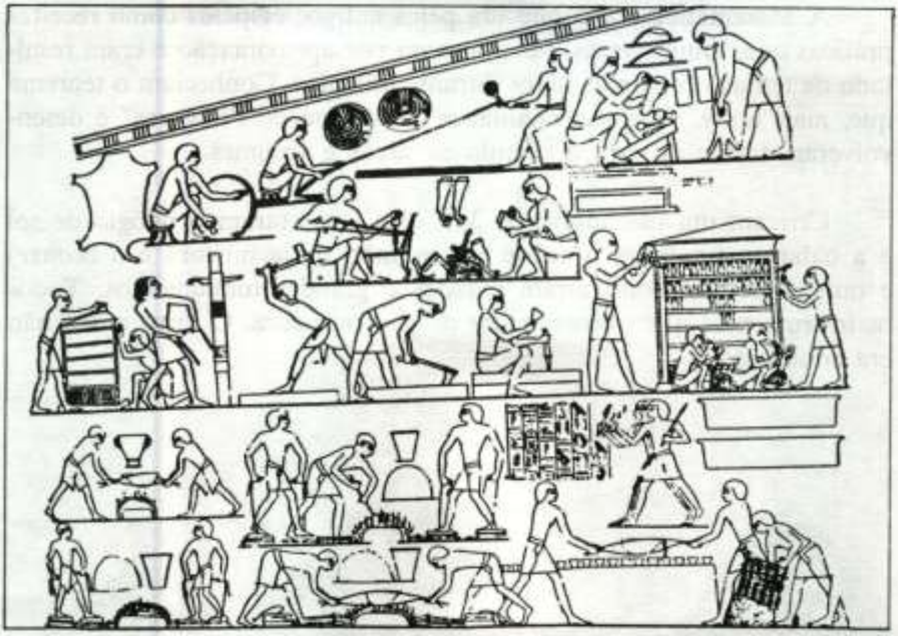
A divisão da sociedade em classes e a propriedade privada levam à criação de medidas para regular posses e à cobrança de impostos. Segundo o historiador grego Heródoto, as inundações do Nilo desmarcavam os limites das propriedades, gerando a necessidade de remarcá-las. Isso era feito com o auxílio de medidas e plantas, pelos chamados "esticadores de corda". Daí o desenvolvimento dos números fracionários. É a Matemática se desenvolvendo no Egito antigo e na Babilônia, do mesmo modo que, posteriormente, com os maias e astecas.

A contribuição egípcia

O início da Antiguidade, há cerca de 6 000 anos, foi marcado por inúmeras novidades matemáticas. O comércio, as construções, a posse e a demarcação das propriedades colocaram novas questões. As medidas nem sempre constituíam números inteiros. Essa necessidade forçou o aparecimento gradativo dos números fracionários.

Os egípcios já conheciam o ábaco, a notação decimal, algumas frações e algumas contas. O um era |, o dez era ∩ ; desse modo,

∩∩||
∩|||| era 36.



Mural egípcio feito há 3 600 anos, mostrando algumas atividades profissionais da época (curtimento de peles, carpintaria, fundição de cobre).

Eles não sabiam multiplicar como nós; sabiam apenas dobrar. Assim, para calcular 13×18 iam dobrando o 18:

1	2	4	8	16	...
18	36	72	144	288	...

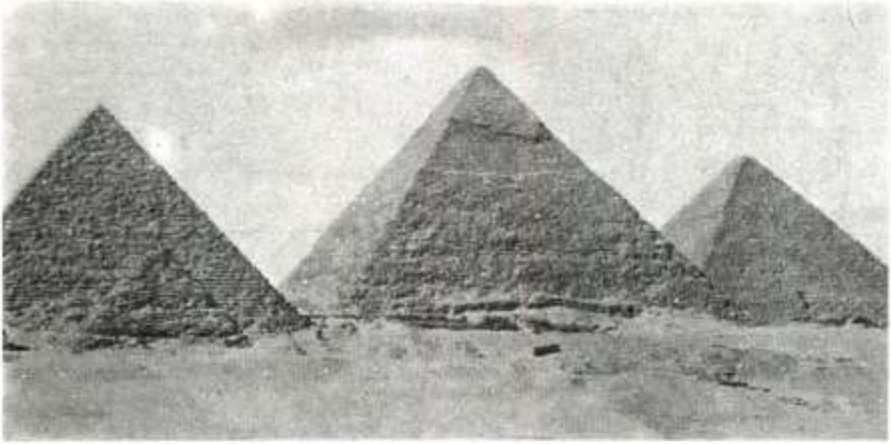
Treze vezes 18 era calculado adicionando $18 + 72 + 144$, da seguinte maneira: uma vez dezoito (18), mais quatro vezes 18 (72) e mais oito vezes 18 (144), isto é: $13 = 1 + 4 + 8$; então, $13 \times 18 =$ $= 1 \times 18 + 4 \times 18 + 8 \times 18 = 18 + 72 + 144 = 234$.

Os egípcios somente operavam com frações de numerador igual a 1, isto é, inversos de números inteiros que eram representados com um sinal ovalado ($\bigcirc$) por cima do numeral. Assim:

Se 3 era $|||$, $\frac{1}{3}$ era $\overset{\bigcirc}{|||}$.

A Matemática era conhecida pelos antigos egípcios como receitas práticas que, muitas vezes, funcionavam por aproximação e eram resultado de tentativas e erros feitos durante milênios. Conheciam o teorema que, mais tarde, passou a chamar-se "Teorema de Pitágoras" e desenvolveram fórmulas para o cálculo de áreas e volumes.

Criaram um calendário de 365 dias, inventaram o relógio de sol e a balança, fundiram o cobre e o estanho (cuja mistura é o bronze) e outros metais. Construíram cidades e grandes monumentos. Todos os instrumentos que usavam eram de pau ou pedra. O ferro ainda não era conhecido.



Os grandes monumentos egípcios, como as pirâmides da foto, eram feitos com instrumentos de madeira, pedra e cobre.

A Matemática entre os gregos e os romanos

O uso do ferro é descoberto na Ásia Menor. Com isso, ferramentas mais eficientes podem ser criadas. Com a utilização das novas ferramentas, a produção aumenta muito, elevando a produção de excedentes. Conseqüentemente, o comércio se expande, intensificando as navegações, melhorando os transportes. A civilização se interioriza mais pela Europa. É a época da hegemonia grega. Aparece o alfabeto, que democratiza a cultura e facilita seu registro, gera maiores conhecimentos e intercâmbio cultural. O grande acúmulo de conhecimentos na Grécia provoca a mudança qualitativa da classificação e ordenação. Começa um trabalho metodológico sobre o grande conhecimento acumulado.

Vai surgir a Filosofia. Contribui também para isso o fato de, nessa época, o trabalho ser realizado por escravos, por ser considerado indigno para homens livres. Estes tinham apenas a função de pensar.

Todas aquelas receitas empíricas utilizadas pelos egípcios, babilônios e habitantes de outras regiões foram organizadas: são os conhecimentos que tratam de números, os que tratam de figuras, os que tratam de doenças etc. Surgem as ciências.

Como os pensadores gregos desprezavam o trabalho, seguiram o caminho das abstrações, aprofundando-se na Matemática, a ciência que mais avançara, enfatizando mais a qualidade que a quantidade, mais a Geometria que a Aritmética. Por isso, a Geometria foi a primeira a receber um tratamento metodológico, culminando com a admirável síntese de Euclides — *Os Elementos* — a primeira obra lógica. É a revolucionária criação da argumentação, da demonstração; é a capacidade de concluir a partir de premissas.

Em seguida, Aristóteles, com seu *Organon*, sintetizou a Lógica como transposição, em palavras, do método de demonstração geométrico que se iniciara com os pré-socráticos (Tales, Pitágoras, Anaxágoras etc.).

Busto de Euclides

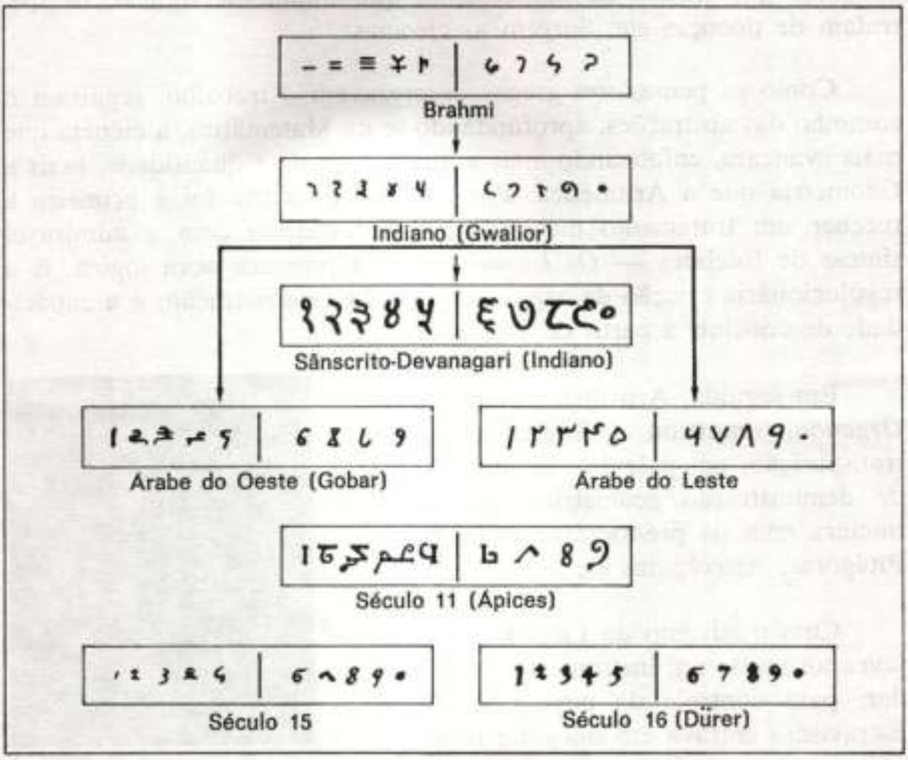
Com o advento da Lógica, a palavra tornou-se um instrumento de poder, para controle da população. O escravismo entrava em sua crise final.

Depois da Geometria e da Lógica, a terceira sistematização ocorreu na Mecânica, com Arquimedes.

No período em que os romanos dominaram o mundo, a Matemática continuou a avançar, especialmente com os matemáticos alexandrinos, como, por exemplo, Eratóstenes (284-192 a.C.), que calculou o tamanho da Terra, Ptolomeu (± 100-168), que escreveu o *Almagesto*, obra que defende a teoria geocêntrica, e Diofanto (325-409 d.C.), que formulou as equações diofantinas, significando uma retomada da Aritmética.

Os árabes e a Álgebra

No início da Idade Média (séculos V e VI), no período de maior expansão árabe, alguns matemáticos, como Avicena, Al-Khowarizmi, Omar Khayyam, Nasir Eddin, entre outros, desenvolveram o *sistema de numeração arábico* (que começou na Índia e na Síria) e a *Álgebra.*



A figura acima mostra algumas fases da evolução dos algarismos.

O sistema decimal posicional, utilizado até hoje com algumas alterações nos numerais, representou para a Aritmética o que o alfabeto foi para a escrita: a democratização. Afinal, fazer contas com algarismos romanos não era nada fácil!

Também devemos aos árabes o desenvolvimento de métodos que tornaram mais simples a resolução de equações. O trabalho com equações começou a adquirir um automatismo parecido com o do ábaco. Por isso, a Álgebra significou uma grande revolução matemática.

Do Renascimento aos nossos dias

Nos séculos XV e XVI, durante o Renascimento, o comércio e as cidades reativaram-se, refloresceram. Nesse período surgem, na Itália, os *números negativos*, devido às necessidades comerciais no cálculo de dívidas e de créditos. Os números negativos permitem "tirar o maior do menor". O novo conjunto chama-se *conjunto dos números inteiros* e vem juntar-se ao conjunto dos números naturais, já existente desde a Pré-história.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots\ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

A resolução da raiz quadrada dos números negativos leva ao aparecimento dos *números complexos*. Nesse âmbito, podemos citar Fibonacci, Tartaglia, Bombelli e muitos outros.

No período das grandes navegações, a Astronomia teve grande impulso, para orientação em alto-mar. O mapa do mundo é quadriculado e as coordenadas são usadas sistematicamente. As rotas são gráficos.

Mapa-múndi elaborado por Ptolomeu em cerca de 150 d.C., já com coordenadas, que passariam a ser intensamente usadas a partir das grandes navegações.

No século XVII, com Descartes, Fermat e outros, surge a Geometria Analítica e desenvolve-se a Trigonometria. Aparecem os logaritmos para a simplificação dos cálculos astronômicos. A ciência continua dependente da técnica, mas começa a ter um novo caráter, não completamente utilitário.

Uma nova revolução matemática se completa com Viète, que passou a utilizar símbolos para qualquer demonstração, usando letras tanto para quantidades conhecidas como para desconhecidas. A rapidez do cálculo foi aumentada e a notação se formalizou, ficando mais rigorosa com símbolos sem conotações, mas operáveis segundo regras. Era a Matemática sem conteúdo, ou melhor, com conteúdo na própria forma. Estamos no tempo de Galileu e da Inquisição.

Pouco depois, com Leibniz e Newton, completou-se a grande síntese do Cálculo Integral e Diferencial. Finalmente, no fim do século passado, acontece a reordenação lógica da Matemática com Cantor, Frege, Russell e outros, dando a ela o acabamento que conhecemos hoje.

A MATEMÁTICA É FÁCIL

A Matemática é a mais antiga das ciências. Por isso ela é difícil. Porque já caminhou muito, já sofreu muitas rupturas e reformas, possuindo um acabamento refinado e formal. Mas caminhou muito justamente por ser fácil.

É isso que devemos considerar quando estamos lecionando, procurando colocar o assunto no nível do desenvolvimento do aluno. Cada período tem suas características, seu grau de abstração, de elaboração, de acabamento e, conseqüentemente, sua didática. Isso acontece na história da Matemática e no ensino da Matemática, seguindo a seqüência:

- as receitas práticas obtidas por tentativa e erro, em atividades concretas, características da Pré-história até o Egito, são estudadas da 1.ª à 4.ª série do primeiro grau;

- a revolução grega da demonstração é incorporada da 5.ª à 8.ª série do primeiro grau;

• a Álgebra — o mecanismo simbólico arábico — passa a ser operada a partir da 7.ª série;

• a formalização de Viète — os símbolos frios e operáveis do Renascimento — começa no segundo grau;

• o Cálculo Diferencial e Integral é estudado nas faculdades de ciências exatas;

• a reordenação lógica moderna — aritmetização da Matemática — é conteúdo das faculdades de Matemática.

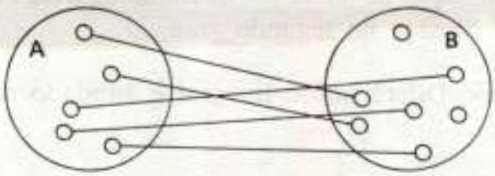
Vista dessa forma, a Matemática pode ser — e é — gostosa e fácil de ensinar ou de aprender, pois corresponde ao desenvolvimento normal do aluno. Nada é estranho, sem continuidade, sem significado.

PRIMEIRAS NOÇÕES MATEMÁTICAS

Um urubu fez seu ninho na torre de uma igreja numa pequena vila. O sacristão responsável pela igreja fez várias tentativas para pegá-lo, mas, toda vez que entrava no prédio, o urubu voava e só retornava quando o sacristão saía. Então, o homem arquitetou um plano para enganar o urubu. Entraram dois homens na igreja, e o urubu voou; saiu um, ficando o outro à espera. O urubu não voltou enquanto não saiu o segundo! Entraram três e saíram dois, ficando o terceiro à espera. Não adiantou! Com quatro, repetiu-se a mesma coisa. Somente com cinco pessoas é que o plano deu certo: saíram quatro, ficou um; o urubu "perdeu a conta", voltou e foi apanhado.

Essa pequena história mostra que até mesmo os animais são capazes de apresentar, embora rudimentarmente, percepções ligadas à quantidade. Experiências semelhantes feitas com outras espécies de animais mostram que eles não sabem contar, mas possuem algumas noções como "aqui há mais bananas que ali". Porém, quando duas quantidades são elevadas e com diferença pequena entre si, mesmo um homem culto não perceberá a diferença, a menos que possa fazer uma correspondência um a um. Por exemplo, sem contar, podemos saber que em

B, na figura que segue, há mais elementos que em *A*. Do mesmo modo, olhando a platéia de um teatro podemos saber, sem contar, se há mais pessoas ou poltronas, desde que as pessoas estejam em seus lugares.



Este é o mais primitivo conceito de quantidade: onde há mais, onde há menos; onde há mais frutos, onde há mais peixes etc. Essa noção, que até os animais podem ter, como vimos pelo conto do urubu, é muito útil para a sobrevivência.

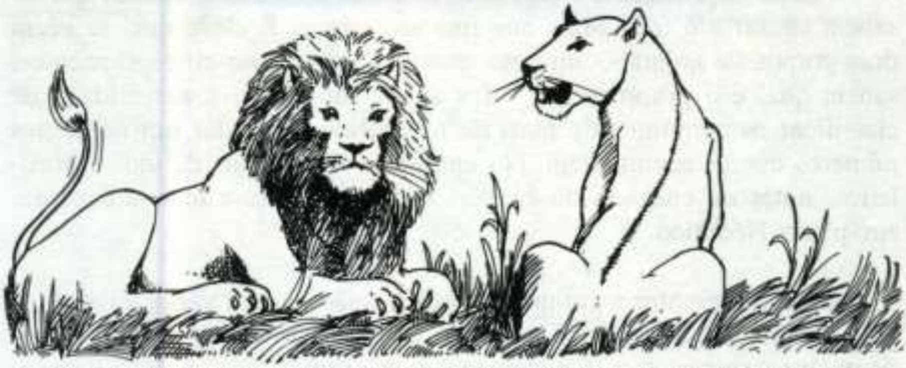
A CRIAÇÃO DO NÚMERO

A necessidade da exatidão na contagem começa já no Paleolítico, quando o homem passa a fabricar machadinhas, tacapes e lanças. Nessa época são criados os primeiros números.

A criação de um número é um processo classificatório, do mesmo modo que a divisão dos animais em mamíferos, peixes, aves etc. *Mamífero* não existe como uma espécie. Existem carneiros, lobos, morcegos, homens. *Dois* não existe concretamente. Existem *conjuntos* de dois elementos. "Mamífero" e "dois" são conceitos ideais, criação humana.

Os números (idéias), juntamente com os numerais correspondentes (palavras, riscos, pedras, símbolos), foram aparecendo um após outro. Devido às necessidades sociais, o *zero* já tinha nome — *nada* — muito antes de aparecerem símbolos matemáticos que o representassem. O zero aparece com a idéia de sucesso e insucesso: cacei ou não cacei, pesquei ou não pesquei.

O segundo número a ser inventado foi o *um*, que surgiu da necessidade de distinguir o singular do plural: nada, um, vários. Depois começa a necessidade de identificar: leão — leoa, boi — vaca, cão — cadela etc.

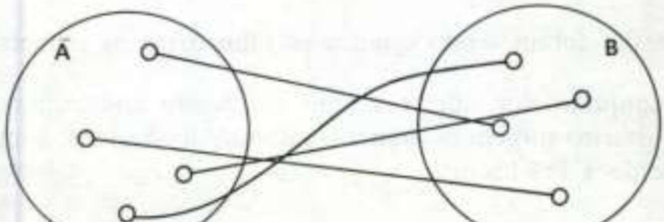


A idéia de "casal" supõe uma quantidade, uma qualidade e uma relação.

A palavra *casal* vem de uma abstração útil que envolve várias idéias: uma qualidade (animais), uma quantidade (dois) e uma relação (macho e fêmea procriando). O termo *casal* não se aplica a duas pedras, nem a três animais. Do mesmo modo, a palavra *par* vem de uma abstração que envolve uma qualidade (objetos), uma quantidade (dois) e uma relação (igualdade ou simetria).

Casal não é número; dois é. O dois "puro" é totalmente abstrato e surge de casal, par, dupla etc. O dois relaciona todos os conjuntos com dois elementos. É a expressão de relacionamento entre conjuntos de dois elementos. O mesmo ocorre com os outros números: três, quatro, cinco etc. A Matemática começou a surgir com essas abstrações.

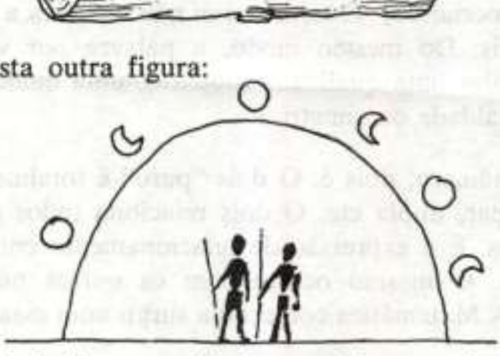
Para abstrair um número, é necessário classificar os conjuntos com aquele número de elementos. Isto se faz com uma correspondência um a um entre os conjuntos. Assim, a noção de número surge da classificação de conjuntos eqüipotentes pela correspondência um a um.



Ainda hoje existem tribos (na Austrália e na Nova Guiné) que só sabem contar até três. Mais que isso são *vários*. É claro que, se vêem dois grupos de animais, um com quatro e outro com cinco elementos, sabem qual é o grupo menor. Mas ainda não surgiu a necessidade de classificar os conjuntos de mais de três elementos e dar um nome aos números que os representem. No entanto, várias tribos de índios brasileiros, antes da chegada do branco, estavam em fase mais adiantada, em pleno Neolítico.

Para representar os números, foram e são usados vários processos. Uma inscrição pré-histórica parecida com a figura abaixo pode significar cinco peixes. Isso é o começo da escrita.

Veja esta outra figura:



Ela pode indicar que dois homens ficaram três dias e três noites ao pé de uma montanha. Notar que o desenho do homem significa homem mesmo, já o sol significa dia. O primeiro é *pictografia* e o segundo, *ideografia*. Para representar três dias, não foi desenhado 3 ○, mas sim ○ ○ ○. Nesse sentido a figura dos cinco peixes é mais moderna, é mais abstrata.

E assim foram sendo criados os números e os numerais.

O conjunto dos números reais foi sendo construído gradativamente. Primeiro surgem os *números naturais* conhecidos, com outra notação, desde a Pré-história.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots\}$$

Com números naturais podemos efetuar adições e multiplicações sem maiores cuidados, porém na subtração e divisão devemos examinar se existem os resultados. Por exemplo: $5 - 7$ não está em $\mathbb{N}$, $3 : 5$ não está em $\mathbb{N}$. Os nossos índios não conhecem $5 - 7$, a não ser alguns aculturados.

Com a invenção dos números negativos, ficou possível "tirar o maior do menor", e $5 - 7 = -2$. O novo conjunto chama-se *Conjunto dos Números Inteiros.*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$$

Nele podemos efetuar subtrações sem maiores cuidados. No entanto, $3 : 5$ não está em $\mathbb{Z}$. Com a invenção das frações — que ocorreu antes da invenção dos números negativos, para resolver problemas de medidas — ficou possível toda divisão, exceto divisão por zero. Primeiro mandamento da Matemática: "Não dividirás por zero".

O conjunto dos números fracionários mais os inteiros, chamado *Conjunto dos Números Racionais*, é:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{5}{7}, 3, \ldots \right\}$$

Todo número racional pode ser escrito em forma de número decimal. Por exemplo:

$$\begin{array}{r|l} 22 & 5 \\ \cline{2-2} 20 & 4{,}4 \\ 0 & \end{array} \qquad \text{logo, } \frac{22}{5} = 4{,}4 = 4{,}40000\ldots$$

$$\begin{array}{r|l} 4 & 3 \\ \cline{2-2} 10 & 1{,}33 \\ 10 & \\ 1 & \end{array} \qquad \text{logo, } \frac{4}{3} = 1{,}33333\ldots$$

$$\begin{array}{r|l} 21 & 7 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array} \qquad \text{logo, } \frac{21}{7} = 3 = 3{,}00000\ldots$$

Alguns números racionais são decimais finitos como $\frac{22}{5}$, outros são decimais infinitos, porém periódicos, como 1,3333... Se colocarmos zeros nos finitos, todo número racional é dízima periódica: 4,4000..., 3,0000... etc.

Porém há números que não são dízimas periódicas. Chamaremos *dízimas não periódicas*. Veja estes:

a) 0,101001000100001000000100...

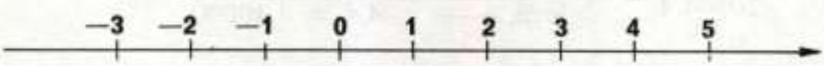
b) $\sqrt{2} = 1,414213562...$

c) $\pi = 3,1415926535...$

São números que não possuem geratrizes. Não podem ser colocados na forma $\frac{p}{q}$, razão entre números inteiros. O conjunto II das dízimas não periódicas chama-se *Conjunto dos Números Irracionais*, ou seja, números que não são *razões*.

Chamamos *Conjunto dos Números Reais* ao conjunto de todos esses números — racionais mais os irracionais — que ficam em correspondência com os pontos de uma reta.

$$\boxed{\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}}$$



Esses nomes não são muito bons. Por exemplo, nenhum número é real, concreto. Todo número é ideal, abstrato, inventado pelo homem. Mas, historicamente, ficaram os nomes: Natural, Inteiro, Racional, Real etc.

Em $\mathbb{R}$ ficam possíveis operações como $\sqrt[3]{9}$, que não está em $\mathbb{Q}$. Contudo, não se pode calcular ainda $\sqrt{-4}$, que não está em $\mathbb{R}$. Números desse tipo pertencem ao *Conjunto dos Números Complexos*, que é estudado no segundo grau.

Devemos ainda classificar os números irracionais em duas categorias: as raízes como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, . . . , chamados números irracionais *algébricos*, que já foram estudados na Grécia clássica, e os chamados números *transcendentais* (que não são raízes), como π e outros. Observar que $\sqrt{4}$ é número natural e que 0,10100100010. . . não é dízima periódica.

Etapas de aprendizagem

Capítulo 2

INTRODUÇÃO

Quando um horticultor faz uma plantação de alface, talvez saiba, mais ou menos, que essa planta possui duas histórias: a história da espécie (que evoluiu desde o aparecimento da vida) e a história de cada pé (desde a semente até a fase adulta) que, aproximadamente, repete a história da espécie.

A alface, como qualquer outro ser vivo, possui um código genético próprio, constituído durante os milhões de anos da história da sua espécie, que dirige a história de cada indivíduo. É importante ressaltar que a história da espécie dirige a história individual, mas não a determina.

Dois erros extremos o horticultor não pode cometer: a *passividade* de não intervir no desenvolvimento da alface, já que ela está geneticamente programada, e a *utopia* de intervir arbitrariamente, para impor sua vontade. É preciso trabalhar usando o conhecimento das próprias leis da natureza, promovendo o desenvolvimento e até influindo nas duas histórias, dentro de certos limites: capinar, adubar, defender, provocar mutações etc.

É preciso conhecer as etapas do desenvolvimento da alface para dar à planta o tratamento adequado: saber qual o momento do plantio, do transplante, da colheita etc. Portanto, não só a história da espécie, mas também o ambiente vai determinar a história individual. O homem trabalha o ambiente. Logo, quanto mais conhecimento ele tem, mais atuante pode ser.

De acordo com Müller (1821-1897), célebre médico naturalista, cada indivíduo possui uma história que transcorre acompanhando aproximadamente a história da espécie à qual pertence. Ele formulou uma lei segundo a qual "o desenvolvimento do indivíduo é uma recapitulação abreviada da história de sua espécie". Essa lei é muito útil, desde que não seja aplicada rigidamente. A espécie humana, por exemplo, foi evoluindo até chegar ao que é hoje, passando por profundas transformações. E cada indivíduo em particular também sofre uma série de metamorfoses, que começam no útero materno e continuam depois do nascimento.

Assim, o fato de ter aprendido a andar eretamente na Pré-história não implica que o homem já nasça sabendo andar. Cada criança deve, sozinha, passar pelas etapas da espécie humana, aprendendo a andar em pé, a falar, a contar, a adquirir noção de conservação e assim por diante. E cada criança faz isso num ritmo próprio.

A Biologia estuda a evolução da espécie humana; a Psicogenética estuda a evolução individual.

PIAGET

Jean Piaget (1896-1980), psicólogo suíço mundialmente famoso por seus estudos na área da Psicogenética, realizou experiências que evidenciaram quatro estágios no desenvolvimento lógico:

Estágio sensório-motor — Vai desde o nascimento até cerca de 24 meses. Nesse período, a criança passa de atividades puramente reflexas à formação dos primeiros hábitos, depois à coordenação entre visão e preensão (olhos e mãos), à procura de objetos escondidos, à prática de atos intencionais, à complexificação e diferenciação de esquemas de ações e à resolução de problemas por compreensão.

Estágio pré-operatório — Vai dos 2 anos, aproximadamente, até cerca de 7 anos. Essa fase tem início com o aparecimento da linguagem, que é uma função simbólica. Começa a curiosidade (por quê? como? que é isto?), aparece o pensamento intuitivo.

Estágio das operações concretas — Vai dos 7 aos 12 anos, aproximadamente, e é o que mais interessa neste livro. Nesta etapa do desenvolvimento, a criança ainda está totalmente ligada a objetos reais, concretos, mas já é capaz de passar da ação à operação, que é uma

CLASSIFICAÇÃO DAS ESTRUTURAS COGNITIVAS			
Estágio	**Características**	**Idade**	**Noções matemáticas**
1. SENSÓRIO-MOTOR		**meses**	
	1. Atividades reflexas	0 — 1	
	2. Primeiros hábitos	1 — 4	
	3. Coordenação entre visão e preensão	4 — 8	Maior/menor
	4. Permanência do objeto, intencionalidade dos atos	8 — 11	Noção de espaço, formas
	5. Diferenciação dos esquemas de ação	11 — 18	
	6. Solução de problemas	18 — 24	
2. PRÉ-OPERATÓRIO		**anos**	
	1. Função simbólica (linguagem)	2 — 4	Desenhos
	2. Organizações representativas, pensamento intuitivo	4 — 5	Contagem, figuras geométricas
	3. Regulação representativa articulada	5 — 7	Correspondência termo a termo, conservação do número, classificação simples
3. OPERAÇÕES CONCRETAS	1. Operações simples, regras, pensamento estruturado fundamentado na manipulação de objetos	7 — 9	Reversibilidade, classificação, seriação, transitividade, conservação de tamanho, distância, área, conservação de quantidade descontínua, conservação da massa (7 anos)
	2. Multiplicação lógica		Classe-inclusão, cálculo, conservação do peso, conservação do volume, frações (9 anos)
4. OPERAÇÕES FORMAIS	1. Lógica hipotético-dedutiva, raciocínio abstrato	12 — 13	Proporção, combinações (12 anos)
	2. Estruturas formais	13 — 15	Demonstração, álgebra (13 anos)

Nota: As idades constantes do quadro são apenas um referencial. Elas variam muito de criança para criança. Além disso, ela pode estar num estágio em relação a um comportamento e em outro em relação a outro comportamento.

ação interiorizada. É também nesse estágio que começa a capacidade de classificar e de fazer transformações reversíveis, isto é, que podem ser invertidas, voltando à origem, que podem ser desmontadas. Começam a se estabelecer algumas noções de conservação.

Estágio das operações formais — Vai dos 11 ou 12 anos até mais ou menos os 15. É a fase em que aparece o raciocínio lógico: a criança já é capaz de pensar usando abstrações.

Cada estágio serve de base para o estágio seguinte; porém o desenvolvimento não é linear nem apenas quantitativo. Há rupturas no modo de pensar, há mudanças de qualidade provocadas pelo desenvolvimento quantitativo de atividades. Por isso, as mensagens são interpretadas de modos diferentes em cada etapa de desenvolvimento da criança. Isso é fundamental em educação. É improdutivo, e até prejudicial, tentar certas atividades com alunos que ainda não estão no estágio de assimilá-las. Assim, um aluno pode não apresentar bom resultado num determinado assunto e de nada adiantará fazer recuperação. É necessária uma correspondência entre o desenvolvimento psicogenético e as atividades propostas na escola, lembrando sempre que o pensamento cresce a partir de ações, ou seja, vai do concreto para o abstrato, da manipulação para a representação, e desta para a simbolização.

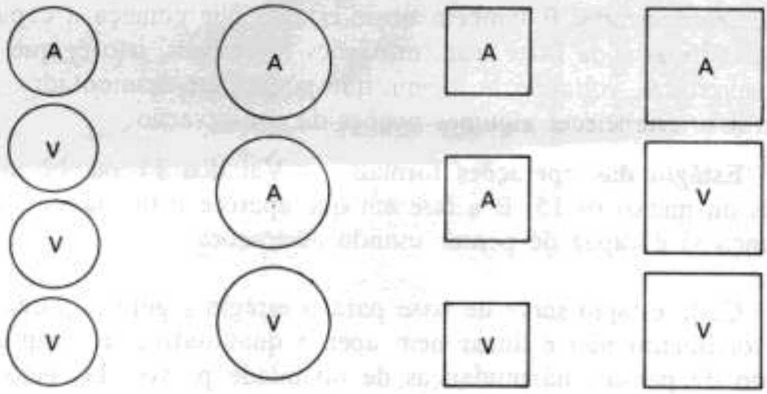
Como avaliar o desenvolvimento psicogenético

Algumas experiências de avaliação do desenvolvimento psicogenético são particularmente importantes na Matemática. Vejamos as principais.

Classificação

Cortar em cartolina quadrados e círculos de dois tamanhos, amarelos e vermelhos.

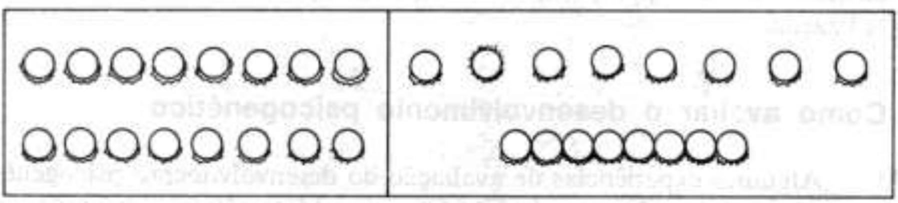
Primeiro, deixar que a criança brinque livremente com as peças. Depois, pedir que as descreva: isto é um quadrado pequeno, vermelho etc. Pedir que as classifique por cor, ou forma, ou tamanho. (Classificar por cor é separar as peças em amarelas e vermelhas; por forma é separar quadrados de círculos.)



Crianças muito novas não fazem classificação. Essa operação é atingida com 5 ou 6 anos. Com mais idade, a criança pode chegar a uma classificação mais complexa.

Essa experiência também pode ser feita com blocos lógicos (ver capítulo 3, página 70), com carrinhos de várias marcas, cores, tamanhos etc.

Conservação do número



Colocar na mesa oito tampinhas de garrafa e pedir à criança que também coloque a mesma quantidade. Temos então uma situação como a mostrada no primeiro quadrinho. Dizer:

— Estas tampinhas são minhas, as outras são suas; quem tem mais?

A resposta será:

— Igual.

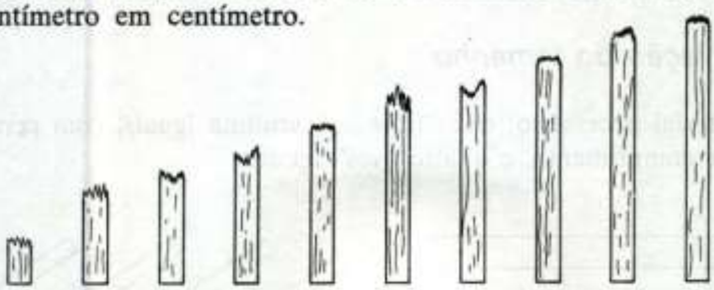
Em seguida, juntar as dela e espaçar as suas, como no segundo quadrinho, e perguntar:

— Quem tem mais, eu ou você?

Crianças de 4 a 5 anos responderão que você tem mais. De 5 a 6 anos, ficarão na dúvida. As de 6 anos já darão a resposta correta, percebendo que o espaçamento não altera o número.

Seriação

Quebrar dez palitos de sorvete em tamanhos diferentes, variando de centímetro em centímetro.



Pedir à criança que os coloque em ordem. Até cerca de 6 anos, a criança não o fará. Apenas separará os palitos em grandes e pequenos, ou os juntará em pequenos conjuntos. Após os 6 ou 7 anos, já será capaz de fazer as comparações corretamente e colocar os palitos em ordem.

Conservação da quantidade descontínua

Para essa experiência são necessários dois copos de formatos bem diferentes um do outro e uma caixa com grãos ou cápsulas.

Ir passando lentamente os grãos da caixa para os dois copos, grão a grão, com ambas as mãos, ao mesmo tempo. Depois de já ter passado certa quantidade, perguntar à criança em que copo há mais grãos.

Respostas que costumam ser dadas por crianças de até 6 anos:

— Este copo é mais alto, tem mais.

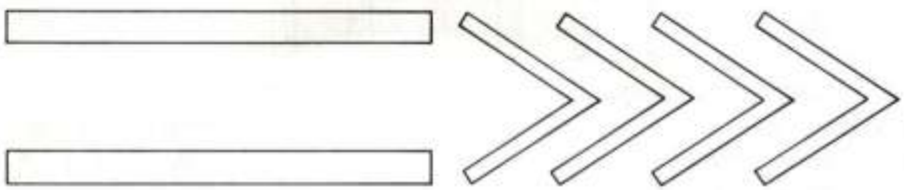
— Neste tem mais porque é mais largo.

Depois dos 6 anos as respostas são corretas:

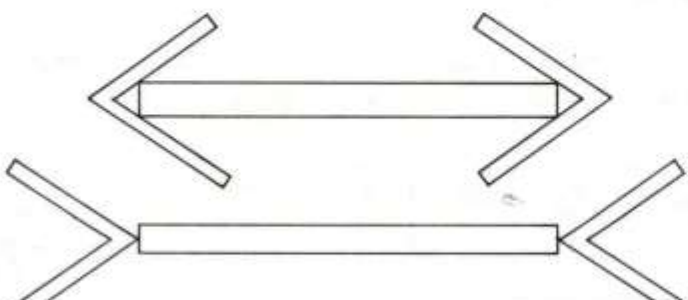
— Têm a mesma quantidade.

Conservação do tamanho

Material necessário: duas tiras de cartolina iguais, com cerca de 12 cm de comprimento, e quatro "vês" iguais.



Montar o esquema da figura e perguntar qual tira é maior. Virar os "vês" e repetir a pergunta.



Antes dos 6 anos, a criança dirá que a tira com os "vês" virados para dentro é menor. Quando viramos os "vês", o comprimento muda.

Após os 6 ou 7 anos, dará a resposta correta. Terá atingido a noção de permanência do comprimento.

Conservação da área

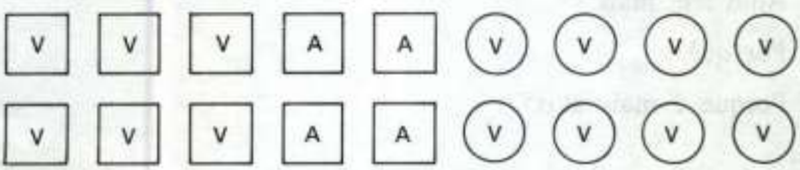
Mostrar à criança duas bolachas redondas ou quadradas, iguais. Dizer à criança que uma bolacha é sua e outra é dela. Depois, quebrar a sua. Perguntar quem ganhou mais bolacha. Pode acontecer uma resposta assim:

— A sua quebrou, ficou menos.

Depois dos 6 ou 7 anos, a criança dará a resposta que o adulto espera. A experiência pode ser feita com "bolachas" de cartolina ou outro material.

Classe-inclusão

São necessárias dezoito peças de cartolina, sendo seis quadrados vermelhos e quatro amarelos e oito círculos vermelhos.



Repare que toda peça amarela é quadrada, mas nem todo quadrado é amarelo. Começar as perguntas:

— Todos os quadrados são vermelhos?

— Toda peça amarela é quadrada?

— Todos os círculos são vermelhos?

— Há mais quadrados ou mais círculos?

— Há mais peças ou mais quadrados?

A última pergunta exige a comparação de um conjunto de peças com um seu subconjunto de quadrados. A idade para responder corretamente a essa pergunta é muito variável, ficando entre 5 e 10 anos. Para compreender o conceito de número, é fundamental a percepção da inclusão de classes.

Conservação de quantidades contínuas (massa)

Para fazer essa experiência com a criança, precisa-se de dois copos exatamente iguais e um terceiro, mais largo, mas com a mesma capacidade dos outros.

Encher com água os copos iguais e perguntar à criança em qual dos dois há mais água. Ela dirá que a quantidade é igual. Despejar o conteúdo de um deles no copo mais largo e voltar com a pergunta.

Até 6 ou 7 anos, as respostas mais comuns são:

— Aqui tem mais.

— Por quê?

— Porque é mais alto.

Ou:

— Esse tem mais água.

— Por quê?

— Porque é mais gordo.

Depois dos 6 ou 7 anos, as respostas são corretas:

— São iguais.

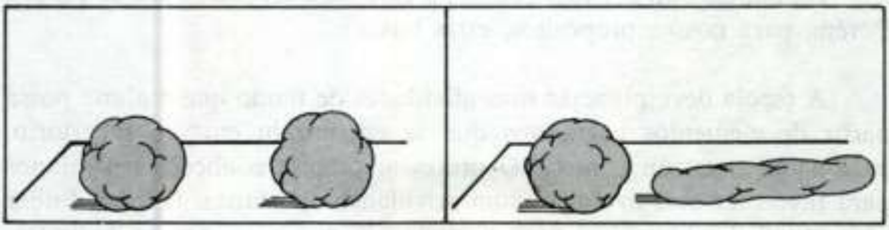
— Por quê?

— Este é mais baixo, mas é mais largo.

Cabe lembrar aqui que os cientistas entram numa outra etapa, na qual a massa não é mais conservada, mas muda com a velocidade, é relativa. Isso, porém, não é da intuição comum.

Conservação do peso

Com argila ou massa plástica fazer duas bolas iguaizinhas e perguntar à criança qual é a mais pesada. Ela responderá que são iguais. Pegar então uma das bolas e pressioná-la até ficar esticada como uma salsicha.



Voltar a perguntar:

— E agora, qual a mais pesada?

As respostas de crianças até 8 ou 9 anos serão:

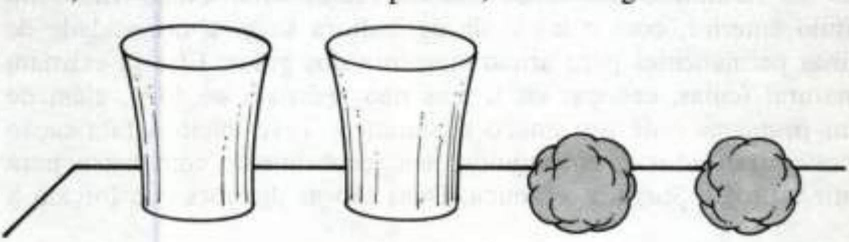
— Esta é mais comprida, é mais pesada.

— Esta é mais leve porque é fina.

A partir dessa idade, começam a dar respostas corretas.

Conservação de volume

Material necessário: dois copos iguais, com água até a mesma altura, e duas bolas de massa plástica, também iguais.



Colocar cada bola num copo e deixar que a criança perceba que os níveis subiram igualmente. Retirar as bolas e transformar uma delas em "salsicha". Daí perguntar:

— Se eu colocar estas massas dentro da água, em que copo o nível da água subirá mais: o da bola ou o da "salsicha"?

Antes dos 10 ou 11 anos, a criança não terá condições de perceber que o volume não se altera com a deformação.

* * *

Há muitas outras experiências na extensa e fecunda obra de Piaget. Porém, para nossos propósitos, estas bastam.

A escola deve planejar suas atividades de modo que o aluno possa partir de elementos cognitivos que se encontram em seu repertório, para então construir o novo. O professor precisa conhecer seus alunos para favorecer essa evolução com atividades oportunas. É inútil forçar uma atividade impossível para a etapa em que a criança se encontra, mas também não se pode ficar esperando que o aluno evolua sozinho, como se o conhecimento estivesse nos códigos genéticos. É necessária uma interação entre as potencialidades de cada etapa e o ambiente — no qual se inclui a escola — que precisa ser rico e motivador.

MATEMÁTICA CONCRETA

As relações recíprocas entre o desenvolvimento do indivíduo (ontogênese) e o de sua espécie (filogênese) levam à integração entre as teorias de Piaget e a Antropologia.

Estudos teóricos permitem chegar a algumas constatações. Por exemplo, a noção de permanência da massa parece fazer parte da revolução do Neolítico, isto é, do fim da Pré-história. Como vimos no capítulo anterior, com o início da agricultura surge a necessidade de vasilhas permanentes para armazenamento dos grãos. Elas já existiam ao natural (cuias, cabaças etc.), mas não resistiam ao fogo, além de serem pequenas e de uso pouco sistemático. Teve início a fabricação de cestos trançados e, em seguida, seu recobrimento com barro para resistir ao fogo. Surge a cerâmica. Duas são as direções que forçam a adaptação cerebral: o próprio trabalho com a "massa" da argila (grandeza contínua) e a manipulação dos conteúdos das vasilhas prontas (grãos: grandezas descontínuas; líquidos: grandezas contínuas). Os grãos são a concretização da permanência, pois a variação de suas disposições, de vasilha para vasilha, não altera sua quantidade. Isso exige o aparecimento da contagem e da permanência do número. As noções de permanência permitem a troca, o comércio.

Resultados de pesquisas nos levam a relacionar, não rigidamente, é claro, o desenvolvimento psicogenético de uma criança com a evolução antropológica. Assim:

Estágio			
	sensório-motor	→ pré-hominídeo	
	pré-operatório (características 1 e 2 do quadro da página 26)	→ Paleolítico inferior	Pré-história
	pré-operatório (característica 3)	→ Paleolítico superior	Pré-história
	operações concretas (característica 1)	→ Neolítico	Pré-história
	operações concretas (característica 2)	→ Egito antigo	
	operações formais	→ Grécia e Roma antigas	

DIENES

As habilidades que um indivíduo possui não aparecem de repente. Elas também resultam de um processo que ocorre por etapas. É uma evolução que se dá do concreto para o abstrato. Muitas vezes, a experiência concreta se realiza na escola, com materiais apropriados. Outras vezes, é a própria vivência que o aluno traz, aprendida no dia-a-dia. A experiência concreta se inicia com a manipulação curiosa, com o contato físico, com os sentidos.

À medida que as experiências vão se acumulando, começam a surgir semelhanças e classificações, que levam à formação dos conceitos. Surge depois a capacidade de descrever, comparar, representar graficamente e, por fim, de equacionar e demonstrar.

A escola deve favorecer e promover esse amadurecimento normal, ao invés de funcionar como empecilho, tornando as atividades forçadas e sem atrativos. As etapas devem transcorrer normalmente e trazer satisfação à criança.

Segundo o educador Zoltan Paul Dienes, essas etapas, na Matemática, são as seguintes:

Jogo livre — É a etapa da curiosidade, do contato com o material, que pode ocorrer na escola. Por exemplo: brincar livremente com blocos lógicos (ver capítulo 3, página 70), sem regras.

Regras do jogo — As próprias crianças começam a se impor regras: fazer montagens, classificar, ordenar (de acordo com sua idade). É o momento de o professor fazer sugestões e dirigir as atividades para certos fins (por exemplo, separar blocos lógicos por cores, formas, tamanhos etc.).

Jogo do isomorfismo — As crianças começam a perceber semelhanças entre os diversos jogos praticados e isso gera uma classificação, através da abstração da estrutura comum. Essa abstração é uma mudança de qualidade provocada pelo aumento quantitativo de estruturas semelhantes.

Representação — Para tomar consciência de uma abstração, a criança tem necessidade de um processo de representação da situação abstraída. Tal representação poderá ser um desenho, um gráfico, um diagrama ou qualquer outra representação visual ou auditiva.

Linguagem inventada — A criança toma plena consciência da abstração. É capaz de descrever, representar e verbalizar a estrutura abstraída. Inventa linguagens e, com a ajuda do professor, seleciona a mais vantajosa.

Teoremas — Nesta última etapa, a criança já é capaz de manipular sistemas formais.

Na Pedagogia tradicional, a direção da aprendizagem é inversa a essa seqüência. A criança passa do sistema formal para a etapa da representação, por meio do simbolismo, e torna-se necessário ensinar-lhe as aplicações dos conceitos na realidade.

Dependendo da idade, o aluno percorrerá as etapas descritas da seguinte maneira: na 1.ª e na 2.ª séries, poderá atingir até a fase da representação; na 3.ª e na 4.ª, poderá chegar à linguagem inventada; somente entre 14 e 15 anos, poderá atingir a última etapa, construindo uma estrutura formal.

Estabelecendo uma relação entre as etapas descritas por Dienes e a Antropologia, como fizemos com a teoria de Piaget, temos o seguinte esquema:

Etapas	jogo livre →	Pré-hominídeo selvagem
	regras do jogo →	Paleolítico inferior (utilização de paus, pedras, couro, ossos, segundo certas regras, cada instrumento com sua utilidade)
	jogo do isomorfismo →	Paleolítico superior (classificação gerando noção de par, números etc.)
	representação →	Neolítico (calendário, desenhos geométricos, cerâmica)
	linguagem inventada →	Egito antigo (receitas e fórmulas práticas)
	teoremas →	Grécia e Roma antigas (teorias formalizadas)

A IMPORTÂNCIA DA VIVÊNCIA

Assim como os povos não evoluíram com a mesma velocidade, também as crianças não amadurecem do mesmo modo, e os conceitos não são interiorizados simultaneamente. Dependem de diversos fatores. A experiência de vida, na idade apropriada, é um fator decisivo; em casa, no clube, na escola, na rua, em todo lugar. E há sempre uma idade mais fecunda para cada experiência.

Na idade certa, é preciso regar plantas com uma mangueira para ter o visual da parábola de água e a sensação da reação da mangueira ao jato; da transformação do esguicho contínuo em gotas; do arco-íris na bruma que orla o jato; das variações do chuveiro provocadas pelo dedo na saída da água etc.

Na idade certa, é preciso serrar madeiras para sentir a textura, as fibras que não podem ser cortadas com faca, as variações de dureza e resistência. É preciso cavar buracos no solo, sentir a terra, os grânulos, a variação de umidade com a profundidade, observar raízes, minhocas, formigas.

Na idade certa, é preciso cozinhar, lidar com fogo, sentir o calor e a luz. Notar a mudança que a cozedura provoca nos alimentos, a evaporação, a condensação. Encostar a mão no cabo de colher de madeira e de metal dentro da panela, para adquirir noção de condutibilidade. É preciso costurar, tecer, pregar botões. Dissolver, misturar, saturar. Usar detergentes, solventes, óleos, cera. É preciso praticar esportes, artes.

São milhares de experiências que desenvolvem os sentidos, possibilitando, logo depois, o aprendizado de artes, ciências e técnicas. Brincar e fazer experiências é construir a base concreta para todas as disciplinas.

Esta é a fase pré-histórica do desenvolvimento da inteligência sensório-motora. É a fase necessária para as posteriores operações concretas, acumulando conhecimentos que serão organizados na etapa das operações formais. Os brinquedos pedagógicos podem, em parte, substituir a riqueza dessas experiências. E muitos brinquedos pedagógicos podem ser elaborados na escola, com materiais disponíveis.

BLOOM

Planejar um curso consiste não apenas em programar o que ensinar, mas também em selecionar as experiências que deverão ser vivenciadas e as técnicas pedagógicas mais apropriadas para o trabalho escolhido.

Um bom planejamento supõe uma definição clara de objetivos a serem alcançados. O estabelecimento de objetivos constitui uma base sólida para a seleção de conteúdos, métodos, técnicas, estratégias e recursos.

Quando fazemos um planejamento, devemos classificar os objetivos para então lhes dar o tratamento adequado.

Classificar objetivos educacionais é, no mínimo, uma experiência enriquecedora para o professor. Ele precisa saber, naquele momento, em que nível vai trabalhar com o aluno: no da informação, no da resolução de problemas, no da demonstração e assim por diante. Cada nível exige abordagem, método e avaliação apropriados. Portanto, é necessária uma séria preocupação com a forma, com o meio que vai ser utilizado nos trabalhos em sala de aula. Por exemplo: os recursos audiovisuais são excelentes para repassar informações (e não apenas para isso), o vídeo está se impondo, trazendo recursos inesgotáveis. O computador é ótimo para treinamento na resolução de exercícios, além de outras possibilidades. Os trabalhos em grupo, as pesquisas de campo, as redações, os seminários, enfim, cada tipo de trabalho produz resultados diferentes.

Se um professor "eficiente" escreve na lousa e explica que a soma das medidas dos ângulos de um triângulo é 180º, o aluno normal aprende. Se, ao contrário, o professor propõe atividades que levam o aluno a descobrir essa propriedade, o aluno também aprende. Em termos de conteúdo, os resultados finais são os mesmos, mas o segundo processo permite atingir muitos outros objetivos, inclusive em níveis comportamentais. Se a escola está apenas amestrando um aluno, o primeiro método é mais direto.

Deve-se estudar bem a taxionomia de Bloom (ver quadro) para verificar que a primeira categoria trata apenas da memória, a segunda começa a exigir certas habilidades motoras e lógicas, a terceira já exige raciocínio e assim por diante. É preciso estimular a inteligência e a criatividade, bem como a motricidade e a afetividade.

Infelizmente, entre nós, o ensino da Matemática fica quase que apenas nos níveis de conhecimento e utilização de métodos e procedimentos, isto é, o aluno aprende a terminologia e as fórmulas e treina fazer substituições para resolver problemas de rotina. A Matemática fica transformada em algo rígido, acabado, chato, sem finalidade. O

TAXIONOMIA DOS OBJETIVOS EDUCACIONAIS — BLOOM

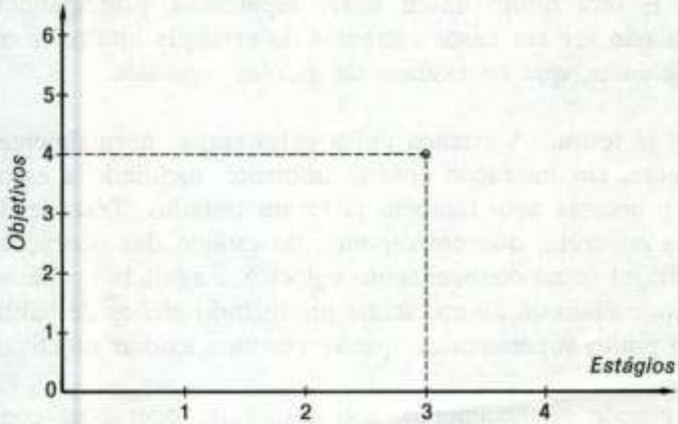
1. Conhecimento de
   - Terminologia
   - Fatos específicos
   - Convenções
   - Tendências e seqüências
   - Classificações e categorias
   - Critérios
   - Metodologia
   - Princípios e generalizações
   - Teorias e estruturas
2. Utilização de procedimentos e processos (rotina)
3. Compreensão
   - Translação
   - Interpretação
   - Extrapolação
4. Aplicação (situações-problemas)
5. Análise de
   - Elementos
   - Relações
   - Princípios organizacionais
6. Síntese
   - Produção de uma comunicação singular
   - Produção de um plano ou conjunto de operações
   - Derivação de um conjunto de relações abstratas
7. Avaliação
   - Julgamento em termos de evidências internas
   - Julgamento em termos de critérios externos

aluno usa apenas a memória; não desenvolve as habilidades de extrapolar, resolver situações-problemas, raciocinar, criar. Não tem o prazer da descoberta. Ficam faltando elementos para seu desenvolvimento integral.

A proposta deste livro é justamente a de programar um ensino de modo a dosar memória, raciocínio e criatividade, tentando a síntese da Matemática tradicional e da moderna.

Outro problema sério e de caráter mais geral está em que nossas escolas definem objetivos apenas em termos de conteúdo, quando o que deveria ser feito é definir objetivos no nível comportamental. Ao professor caberia selecionar atividades e conteúdos para atingir aqueles objetivos. Isto sem falar em objetivos afetivos e psicomotores, dos quais não *tratamos neste* livro, mas que estão testados nas atividades propostas.

Estudamos Piaget e Bloom. Veja agora o produto cartesiano de suas teorias, formado pelos estágios piagetianos no eixo horizontal e os objetivos classificados por Bloom no eixo vertical:



Desse modo, (3, 4) significa trabalhar no estágio das operações concretas (passagem para operações formais) e no nível da aplicação. *

O PROBLEMA DA AVALIAÇÃO

Avaliação é um assunto muito sério. O processo de avaliação tem uma relação direta com os objetivos formulados e neles encontra seu significado. Em outras palavras, só se pode fazer uma avaliação quando se tem por referência objetivos a alcançar.

Avaliar não significa constatar o que ocorreu, mas fazer um balanço entre o que se pretendia e o que foi conseguido. É algo que compromete muito o educador, mas também é o único instrumento capaz de apontar em que direção e com que intensidade caminha o desenvolvimento do aluno.

---

* O autor está trabalhando neste modelo, utilizando a Teoria das Catástrofes por causa dos saltos qualitativos no eixo dos estágios. Estuda também a possibilidade de mais um estágio: dialética.

Quando os objetivos são definidos apenas em termos de conteúdo, a avaliação é quase mecânica, através de provas objetivas, até em forma de testes de múltipla escolha. Este livro contém orientações para aulas expositivas, visando ao conteúdo. Porém, se o professor passa a desenvolver atividades como as aqui sugeridas, trabalhando com habilidades e redescobertas, a avaliação muda de forma e de finalidade. E será muito difícil haver repetência, principalmente na 1.ª série, a não ser em casos extremos de crianças limítrofes ou com graves problemas, que necessitam de escolas especiais.

Piaget já testou. A criança passa pelas etapas normalmente, diferenciadamente, em interação com o ambiente, incluindo a escola. As atividades propostas aqui também já foram testadas. Trata-se de uma Matemática concreta, que corresponde ao estágio das operações concretas de Piaget (e ao conhecimento egípcio). Engajada no desenvolvimento psicogenético do aluno, acaba produzindo efeitos de habilidades e conteúdo muito superiores ao que se costuma avaliar objetivamente.

Este grande conhecimento, sob forma de operações concretas, será sistematizado, como na Grécia clássica, quando o aluno entrar no estágio das operações formais, época em que as avaliações ficam mais objetivas.

Da 1.ª à 4.ª série, a avaliação para esse método é acompanhar permanentemente o aluno, verificando se ele fez as atividades, que tipo de mudança de comportamento ocorreu (e que nem sempre é o mesmo de aluno para aluno). Por serem atividades interessantes, desafiadoras e ligadas à própria evolução do aluno, provocam mudanças normais, sem traumas, respeitando individualidades e, fecundamente, acelerando o próprio amadurecimento. Há atividades individuais e em grupos. Outras, para pesquisa ou treinamento em casa. Pode haver provas individuais ou em grupos, mas apenas como *mais uma* atividade. Aliás, o preparar-se para uma prova é uma das maiores distorções do ensino.

O aluno normal só poderia ficar retido se, no momento de a escola trabalhar com operações formais, ele ainda estivesse em outro estágio. O professor que desenvolver sua atividade normalmente terá, com um aluno normal, um desenvolvimento normal. Por isso, o mais importante é o professor se auto-avaliar.

É evidente que o aluno, até a 4.ª série, precisa conhecer, explicitamente, algumas informações como as quatro operações, frações e um pouco de geometria. Porém, isso é pouquíssimo perto da riqueza de estruturas que ele constrói. Se o ensino for lúdico e desafiador, a aprendizagem prolonga-se fora da sala de aula, fora da escola, pelo cotidiano, até as férias, num crescendo muito mais rico do que algumas informações que o aluno decora porque vão cair na prova. Aliás, informação por informação, elas estão nos livros, muito bem explicadas, e agora também nos vídeos e computadores, cada vez mais eficientes.

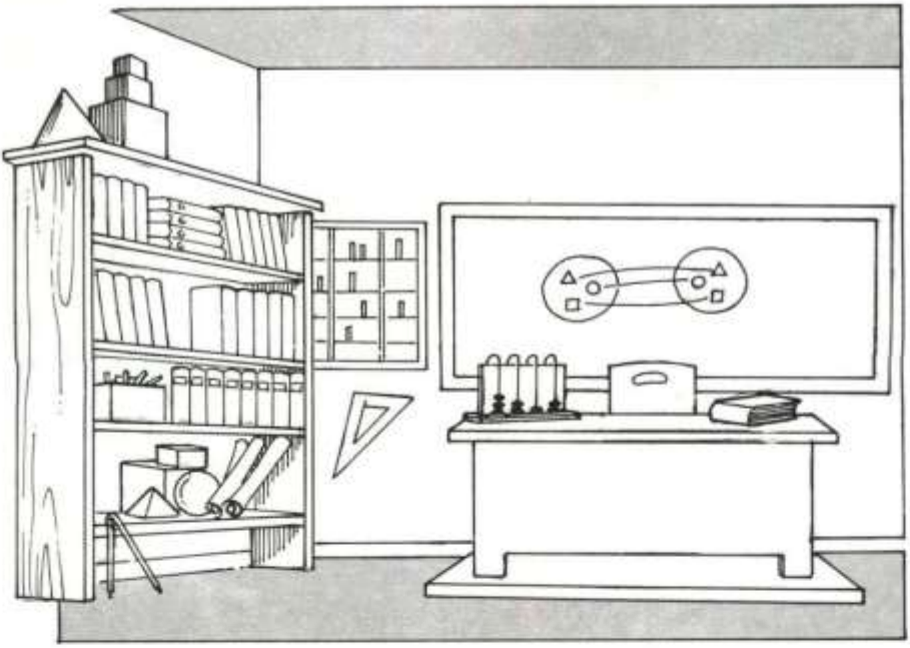
Vale aqui uma comparação. Quando foi inventada a fotografia, os pintores se libertaram da cópia. Em termos de informações superficiais, a pintura não pode competir com a fotografia e o cinema. Os pintores agora trabalham com composições de formas e cores para provocar sentimentos. Trabalham no nível psicológico, com emoções que a técnica dificilmente atinge. Qualquer pessoa é capaz de fotografar; existe um grande número de pintores que copiam rostos, fotos, paisagens. Porém artistas, são poucos. Agora a máquina invade a educação no campo da informação. O professor, liberto da aula mecânica, pode cuidar de comportamentos e afetos.

Laboratório de Matemática

Capítulo 3

INTRODUÇÃO

Como vimos no capítulo anterior, para um ensino eficiente da Matemática o professor tem necessidade de partir do concreto para o abstrato. Com isso, ele desenvolve métodos próprios, integrados nas teorias que estuda, levando em conta as particularidades do aluno (região onde vive, classe social, faixa etária, nível de escolaridade etc.). Aos poucos, o professor vai formando um "cantinho da Matemática", às vezes uma simples estante onde se encontram livros, cartazes e diversos materiais com os quais faz experiências, desenvolve novas técnicas e vai acumulando resultados.



Neste capítulo, trataremos de diversos recursos concretos, com sugestões para atividades, que contribuirão na formação do "cantinho da Matemática". Esse acervo poderá crescer, a ponto de a escola, ou o próprio professor, possuir um *laboratório* ou uma *sala ambiente*, criados lentamente, sem muitos gastos e na medida de sua utilização. É muito fácil! Com um pouco de prática, o professor formará o laboratório com diversos utensílios elaborados pelos próprios alunos, aproveitando o material disponível. A ação de produzir é mais importante que o próprio material produzido. O laboratório poderá incluir um *museu* e uma *biblioteca*.

A aprendizagem deve processar-se do concreto para o abstrato. Toda atividade feita com material concreto pode ser repetida, de diversas formas, graficamente. É o primeiro processo de abstração.

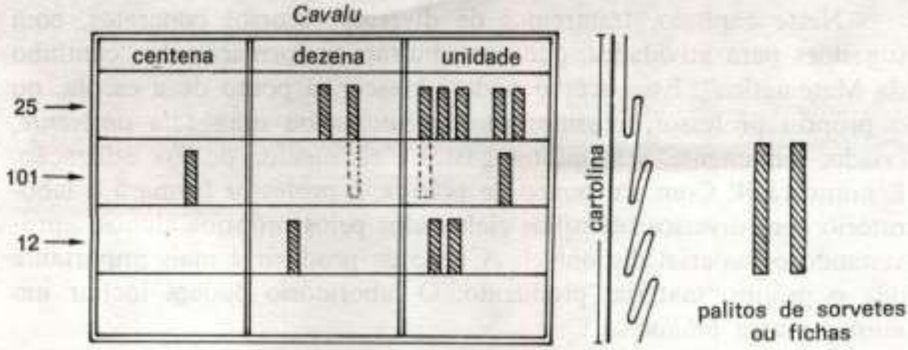
As sugestões de atividades de Aritmética e Geometria serão vistas posteriormente. Antes, torna-se necessário estudar alguns recursos para aprendizagem, bem como o modo de confeccioná-los e de utilizá-los em classe.

CARTAZ VALOR DO LUGAR (CAVALU)

O cartaz valor do lugar, que chamamos abreviadamente de *cavalu*, é decisivo no trabalho com números e operações para as duas primeiras séries, assim como outros materiais concretos (tampinhas, palitos, pedras etc.).

O cartaz deve ficar permanentemente preso na parede e em lugar bem visível; poderá ser confeccionado também em tamanho reduzido, para trabalhos em grupo ou individuais.

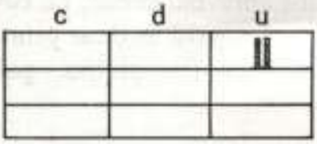
A confecção do cartaz é muito simples. São necessárias uma cartolina e uma folha de papel. No papel, fazer três dobras (ou mais). Grampear ou costurar ao redor para fixar o papel com dobras na cartolina e fazer mais duas costuras verticais dividindo o cavalu em três colunas, ficando com nove bolsas. Escrever em cima: unidades, dezenas e centenas. O cavalu também pode ser feito com lona costurada e fixada em compensado ou papelão.

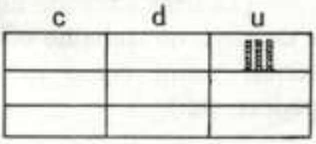


No cavalu desenhado acima, temos, na primeira linha, o número 25: duas dezenas e cinco unidades; na segunda linha, temos o 101; na terceira, o 12. Para representar os números, usar palitos de sorvete, fichas ou algo semelhante. Tudo bem simples e que possa ser visto com clareza do fundo da sala. Todos os palitos devem ser iguais. O que diferencia as ordens é o lugar. Aí está o fundamental: *o valor do lugar*.

Sugestões de atividades

1. Os números vão sendo representados no quadro à medida que vão sendo estudados.





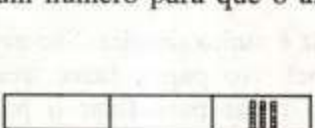
2. Quando chegar ao 5:

a) escolher um número de 1 a 5 para o aluno representar no cavalu;

b) representar um número para que o aluno o leia.

3. Adição:

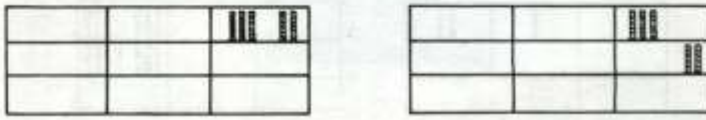
3 + 2



Contar o total.

4. Subtração:

5 — 2



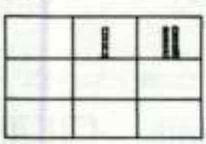
Passar dois palitos para baixo e contar quantos ficaram (os cinco palitos podem ser três de uma cor e dois de outra).

5. Continuar representando os números até passar de dez, sempre na coluna das unidades. Combinar de fazer amarradinhos de dez (de uma dezena), porque os palitos não estão mais cabendo na coluna. Depois de trabalhar um pouco com amarradinhos representando 10 + 1, 10 + 2 etc., combinar que os amarradinhos ficarão do lado esquerdo, na coluna das dezenas. Trabalhar um pouco dessa forma, separando os amarradinhos das unidades. Por último, uma vez que na segunda coluna só ficam as dezenas, combinar que elas poderão ser representadas por uma ficha apenas. Cada ficha da esquerda vale um amarradinho, uma dezena. É o valor do lugar.

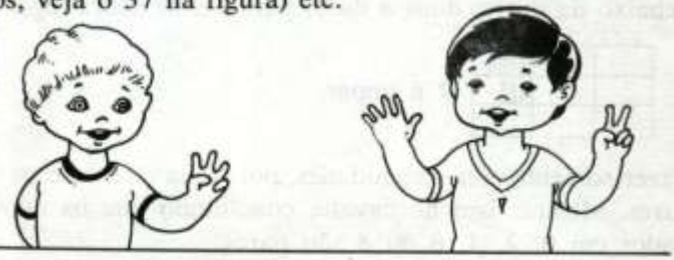
6. À medida que os números vão sendo estudados, repetir sempre esta atividade:

a) representar um número e pedir ao aluno que o leia;

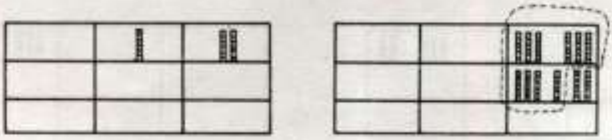
b) dizer um número e pedir ao aluno que o represente no cavalu.

12  15  23 

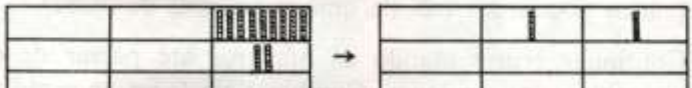
7. Desenhando o cavalu simplificado no caderno, repetir as atividades do item 6. Fazer variações como: pedrinhas em buracos, ábaco, dois meninos (o das unidades e o das dezenas, representando com os dedos; veja o 37 na figura) etc.



8. Transformar dezenas em unidades e vice-versa:

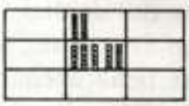
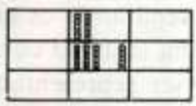


9. Adição (com reserva):

9 + 2 

Dez unidades foram transformadas em uma dezena.

10. Adição e subtração de dezenas inteiras:

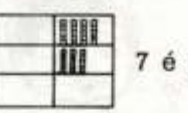
20 + 50  60 — 40  (Ver item 4.)

11. Adição e subtração de dezenas inteiras com dezenas e unidades:

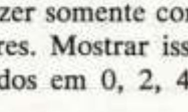
30 + 24 

Contar o total: 5 dezenas e 4 unidades = 54.

12. Adição e subtração de dezenas e unidades (sem reserva):

34 + 23  36 — 14 22

13. Par ou ímpar? Dado um número, pegar as fichas e colocá-las uma debaixo da outra, duas a duas, para ver se sobra alguma sem par.

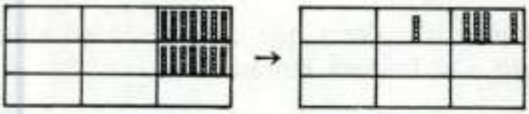
7  7 é ímpar.

Fazer somente com as unidades, pois toda dezena é par. São cinco pares. Mostrar isso no cavalu, concluindo que os números terminados em 0, 2, 4, 6 ou 8 são pares.

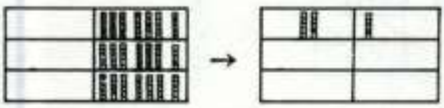
14. Multiplicação por 2:

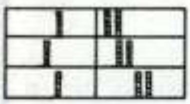
2 × 3 

Repetir o 3 duas vezes.

2 × 7  (Ver item 8.)

15. Multiplicação por 3:

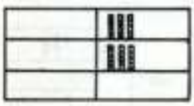
3 × 7  → 21

3 × 12  → 36

Ler assim mesmo, sem mexer no cavalu: trinta e seis. Dizer: três vezes duas unidades, três vezes uma dezena, preparando para o algoritmo.

16. Divisão por 2:

Repartir as fichas em duas dobras (de uma em uma, duas em duas, como quiser).

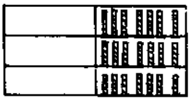
6 ÷ 2 

Contar em uma dobra: todas têm a mesma quantidade.

17. Divisão por 3:

Repartir as fichas em três dobras, como no item anterior.

21 ÷ 3



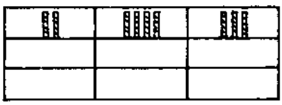
Contar em uma dobra.

18. Representar números maiores que cem. Pedir ao aluno que leia; dar um número e pedir para representá-lo.

19. Transformar centena em dezena e vice-versa (análogo ao item 8).

20. Valor absoluto *versus* valor relativo:

243

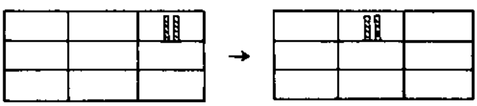


- o 2 não é 2, é 200, duas centenas;
- o 4 não é 4, é 40, quatro dezenas;
- o 3 é 3 mesmo, 3 unidades.

Os algarismos são 2, 3 e 4, mas a posição lhes dá outro valor. Mais tarde, dizer que o 2 é 2 e é 200: valor absoluto, 2; valor relativo, 200.

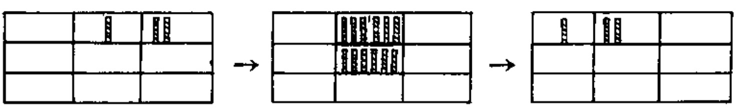
21. Multiplicação por 10:

$2 \times 10 = 10 + 10 = 2$ dezenas.



O 2 vira 20; é só colocar um zero no 2.

$12 \times 10 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 +$
$+ 10 + 10 + 10 = 12$ dezenas. $12 \times 10 = 120$.

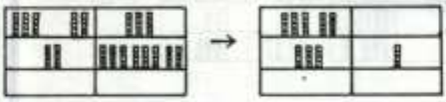


O 12 vira 120; é só colocar um zero no 12.

22. Adição (com reserva):

a) primeira série de exercícios somente no cavalu:

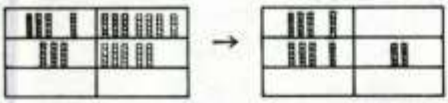
$$\begin{array}{r} 53 \\ +\underline{28} \end{array}$$



→ 81

b) Segunda série de exercícios, associando, passo a passo, o cavalu com o abstrato:

$$\begin{array}{r} 47 \\ +\underline{35} \end{array}$$



→ 82

$$\begin{array}{l} 40 + 7 \\ \underline{30 + 5} \\ 70 + 12 = 70 + 10 + 2 = 82 \end{array}$$

c) Terceira série de exercícios, somente em abstrato:

$$\begin{array}{rl} 58 = & 50 + 8 \\ +\underline{24} = & \underline{20 + 4} \\ & 70 + 12 = 70 + 10 + 2 = 82 \end{array}$$

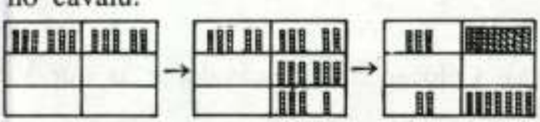
d) Quarta série de exercícios, formalizando aos poucos o algoritmo:

$$\begin{array}{r} 6 \vdots 5 \\ +\underline{2 \vdots 7} \\ \underline{8 \vdots 12} \\ 9 \vdots 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 \vdots 6 \\ +\underline{3 \vdots 7} \\ 9 \vdots 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 29 = & 20 + 9 \\ 38 = & 30 + 8 \\ +\underline{5} = & \underline{5} \\ & 50 + 22 = 70 + 2 = 72 \end{array}$$

23. Subtração (com reserva):

a) Só no cavalu:

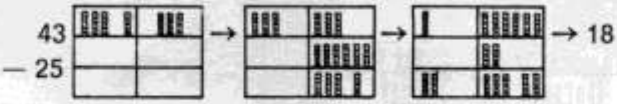
$$\begin{array}{r} 65 \\ -\underline{27} \end{array}$$



→ 38

(parte ← retirada)

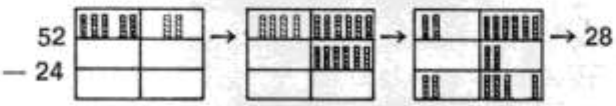
b) Fazer a associação entre números, passo a passo, no cavalu:



$$40 + 3 \qquad 30 + 13 \qquad \begin{array}{r} 30 + 13 \\ -\,20 - 5 \end{array}$$

Do 3 não se pode tirar 5, por isso uma dezena foi transformada em unidades, ficando 30 e 13.

c) Até o fim, só no cavalu:



Em seguida, só em abstrato, repetindo o que foi feito no cavalu:

$$\begin{array}{rcrcr} 52 & = & 50 + 2 & = & 40 + 12 \\ \underline{-24} & = & \underline{-20 - 4} & = & \underline{-20 - 4} \\ & & & & 20 + 8 = 28 \end{array}$$

d) Finalmente sem cavalu, só em abstrato:

$$\begin{array}{r} 2 \\ \cancel{3}15 \\ \underline{-\,1\ \ 7} \\ 1\ \ 8 \end{array}$$

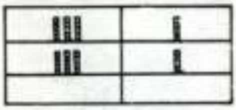
24. Cálculo do desconhecido:

$\square + 3 = 8$

São oito fichas. Colocar três no cavalu, e as que sobrarem, no quadrado acima.

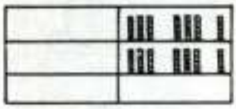
25. Multiplicação (com algoritmo):

2 × 31



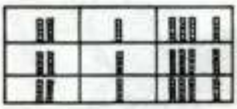
$$\begin{array}{r}31\\31+\\\hline 62\end{array}\qquad \begin{array}{r}30+1\\\times 2\\\hline 60+2\end{array}\qquad \begin{array}{r}31\\\times 2\\\hline 62\end{array}$$

2 × 17



$$\begin{array}{r}17\\17+\\\hline 34\end{array}\qquad \begin{array}{r}10+\ 7\\\times\ 2\\\hline 20+14\end{array}\qquad \begin{array}{r}17\\\times 2\\\hline 34\end{array}$$

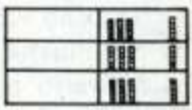
3 × 214



$$\begin{array}{r}214\\214\\214+\\\hline 642\end{array}\qquad \begin{array}{r}200+10+\ 4\\\times\ 3\\\hline 600+30+12\end{array}\qquad \begin{array}{r}214\\\times 3\\\hline 642\end{array}$$

26. Divisão:

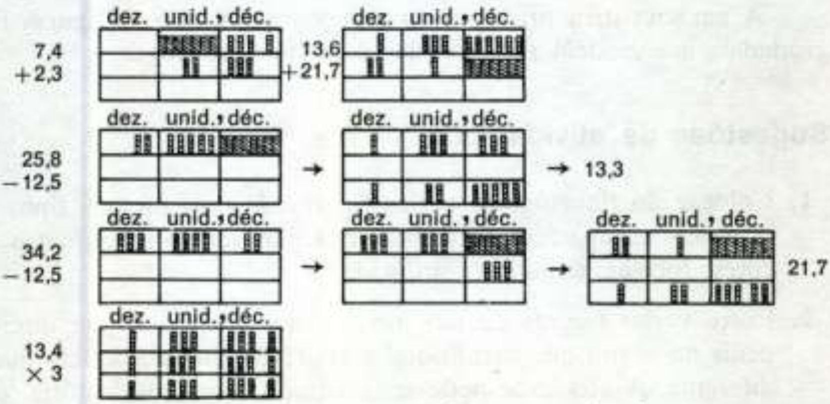
14 ÷ 3



sobra

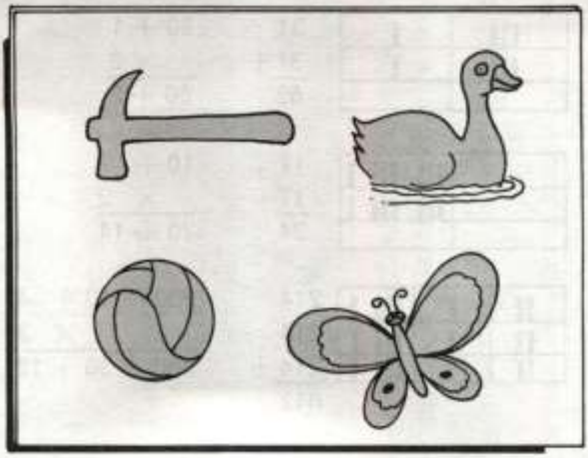
Colocar em três pregas do cavalu (de uma em uma, duas em duas, como se quiser e for possível).

27. Operações com números decimais:



Distribuir no cavalu, como se não houvesse vírgula.

FLANELÓGRAFO



A confecção é simples. Um compensado de 1 m por 80 cm, aproximadamente, coberto com flanela. Pode ser feito no verso do cavalu. As figuras também são feitas em flanela (ou cartolina) e, para facilitar sua fixação no quadro, devem ter coladas no verso três tirinhas de lixa para madeira. É só isso. Tudo muito bonito e colorido.

As figuras devem ser feitas de acordo com as necessidades. Inventar histórias: eram três patinhos nadando, chegaram mais dois etc. É preciso utilizar figuras que possam ser reproduzidas no caderno ou em folhas mimeografadas.

A característica principal do flanelógrafo é que as figuras ficam grudadas, mas podem ser retiradas e trocadas de lugar.

Sugestões de atividades

1. Colocar no flanelógrafo várias figuras de dois ou três tipos para o aluno agrupar, classificando e separando em conjuntos (por cores, formas, tamanhos, utilidade).
2. Entre várias figuras de um mesmo tipo e apenas uma diferente, pedir ao aluno que identifique e retire do quadro aquela que for diferente. A atividade pode ser ilustrada com uma história, como a do patinho feio.

3. Cercar conjuntos e ligar elementos (as tiras e setas de ligação podem ser de cartolina). Fixar no quadro um conjunto de pires e outro de xícaras. Perguntar em que conjunto há mais elementos. Para responder, o aluno deve ligar cada xícara a um pires. Repetir a atividade com conjuntos de bolas e crianças, peixes e aquários etc.

4. Seriação. Pôr em ordem figuras de tamanhos diferentes.

5. Classificar e ordenar figuras representando números (folhas de uma ponta, duas, três, . . .; árvores de um galho, dois, três, . . .; dados em várias posições etc.).

6. Jogo do um a mais. Ir colocando figuras de uma em uma no flanelógrafo para que os alunos digam o número; cada número é sempre um a mais do que o anterior. Fazer também o inverso: tirar de uma em uma (jogo do um a menos), de duas em duas (dois a menos) etc.

7. Adição. Colocar três laranjas de um lado e dois abacates de outro. Montar o problema: Papai foi à feira, quantas laranjas comprou? Quantos abacates? Pedir a um aluno que junte tudo. Perguntar em seguida:
— E no total, quantas frutas papai comprou?
A ação de reunir é necessária. É ela que leva ao conceito de adição. Fazer várias vezes a atividade com outros números.

8. Subtração. Colocar seis ferramentas no flanelógrafo. Perguntar:
— Quantas são as ferramentas?
Mandar retirar três.
— Quantas sobraram?
Essa ação de retirar é que leva ao conceito de subtração. Repetir.

9. Inversibilidade. Retirar e colocar figuras no quadro, para formar a noção de adição e subtração como operações inversas.

10. Outros modos de perceber a adição e a subtração:
— Quantos devo colocar para ficarem sete?
— Quantos devo retirar para ficarem quatro?
— Quantos faltam? Quantos a mais?

— Retirei três e fiquei com cinco, quantos eram?

— Coloquei dois e fiquei com sete, quantos eram?

11. Separar em dois conjuntos.
Exemplo: sete bolas.
Há várias soluções:

$1 + 6,\ 2 + 5,\ 3 + 4,\ 4 + 3,\ 5 + 2,\ 6 + 1.$

12. Separar em três conjuntos, repetindo o raciocínio anterior.

13. Associar. Vejamos um exemplo com três conjuntos: três vacas, dois burros e quatro cabritos.

a) Juntar vacas e burros, achar o total e depois juntar os cabritos: $(3 + 2) + 4$.

b) Juntar burros e cabritos, achar o total e depois juntar as vacas: $3 + (2 + 4)$.

14. Multiplicação. Usar conjuntos com o mesmo número de elementos.

Exemplo: três currais com duas vacas em cada um. No total: $2 + 2 + 2 = 3 \times 2$.

15. Divisão. Repartir flores em três vasos; repartir vacas em currais etc.

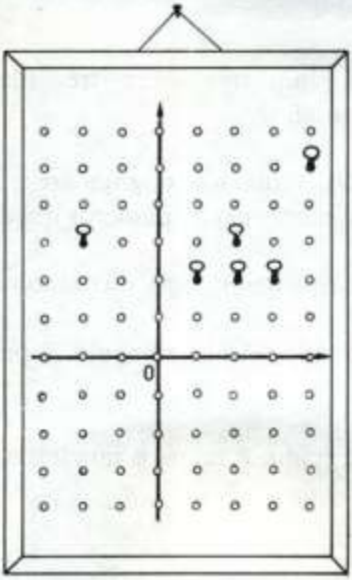
QUADRO DE PINOS

É um quadro simples, com furos, e cerca de vinte pinos que podem ser colocados nos furos. Pode ser feito de compensado ou chapa de papelão. Deve-se riscar duas retas perpendiculares e fazer um gancho para pendurar na parede.

O quadro de pinos é muito útil para jogos. As atividades se desenvolvem sempre em duas direções:

a) pedir ao aluno que coloque pinos segundo uma regra;

b) colocar os pinos no quadro e pedir ao aluno que descubra a regra.



Sugestões de atividades

1. Jogo de representar números com pinos. Cada pino é uma unidade; um aluno diz (ou escreve) um número, e outro o representa.

2. Jogo da ordem. Formar escadinhas:

```
        o
    o   o
o   o   o etc.
```

3. Par ou ímpar?

```
o  o  o
o  o  o  o
```

4. Adição:

8 + 5: colocar oito pinos mais cinco pinos e contar o total.

5. Subtração:

7 — 4: colocar sete pinos, retirar quatro pinos e contar o que restou.

6. Multiplicação:

3 × 5: colocar cinco pinos três vezes (três filas horizontais ou verticais) e contar o total.

7. Jogo da decomposição. Números retangulares, números primos, números compostos, números pares, números quadrados. Exemplos:

o o o
• 6: o o o forma retângulo, logo é composto;

• 5: o o o o o não forma retângulo, é primo;

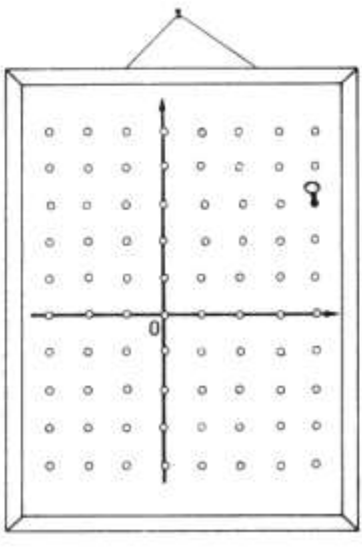
o o
• 4: o o forma quadrado, é número quadrado.

8. Divisão:

18 ÷ 3: tomar dezoito pinos e distribuir em três filas. Mostrar que as três filas ficam iguais.

9. Metade — dobro; um terço — triplo etc.

10. Jogo do par ordenado:



a) Dado o par ordenado (4, 3), localizar no quadro: quatro para a direita e três para cima (como na figura anterior).

b) Colocar um pino no quadro e pedir que o aluno diga os números (coordenadas); usar apenas o primeiro quadrante (números positivos).

11. Gráficos. Impor condições:

a) Todos os pinos com o primeiro número igual a três: (3, 2), (3, 5) etc.

b) Todos os pinos com o segundo número igual a cinco: (2, 5) etc.

c) Todos os pinos com o primeiro número igual ao segundo: (2, 2) etc.

d) Todos os pinos com o segundo número igual ao dobro do primeiro: (3, 6), (1, 2) etc.

e) Todos os pinos com o segundo número igual ao primeiro mais um: (2, 3), (1, 2) etc.

Cada caso destes resulta numa reta. Os pinos devem ser ligados com um barbante. Mais tarde, dá-se um comando como: o segundo número igual ao quadrado do primeiro. Isso levará à formação de uma parábola.

12. Operações vistas como funções de $N^2 \rightarrow N$:

a) Com adição. Colocar o pino em (5, 3); o aluno deve pensar nos dois números coordenados e dizer *oito*.
Cada par de números possui uma soma. Ocorre o mesmo com as outras operações. Aumentar a velocidade, combinar jogos, pagamento de prendas etc.

b) Com divisão. Se o pino for (6, 2), o aluno deve dizer *três*; se o pino for (7, 3), o aluno diz ser impossível. Porém, a partir da 3.ª série, dirá *sete terços*.

13. Relações. O quadro de pinos pode também ser usado para gráficos e relações (visualizar as propriedades reflexiva, simétrica e assimétrica).

14. Formar figuras geométricas, ligando pinos com barbante ou cordinhas: polígonos, polígonos estrelados, diagonais, sevianas etc.

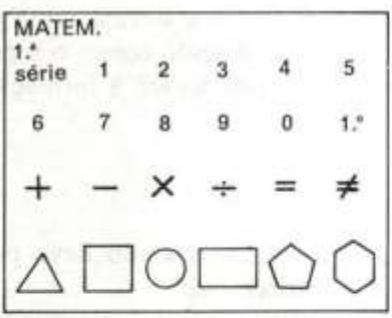
Pedir o simétrico de (5, 3) em relação à bissetriz do primeiro quadrante. Nos níveis mais adiantados, pedir o simétrico em relação aos eixos e à origem.

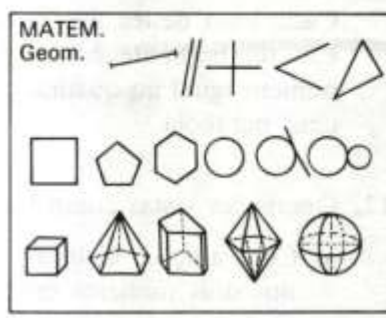
Dar (5, 3) e pedir a soma (ou outra operação) das coordenadas do simétrico. A complexidade desse jogo pode ser aumentada, compondo simetrias.

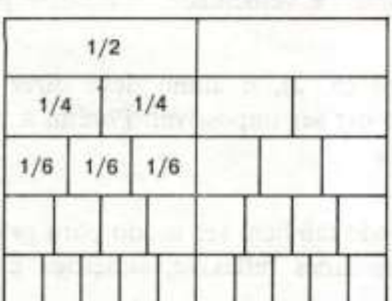
Todas essas atividades podem ser refeitas em cadernos quadriculados. Cada pino equivale a colorir um quadrinho.

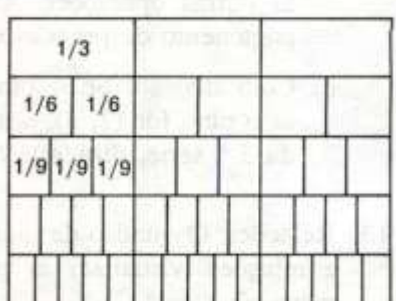
CARTAZES

Os cartazes são muito úteis para ilustrar algumas atividades e podem ser deixados permanentemente na parede, mostrando todos os símbolos matemáticos daquela série, oferecendo aos alunos uma visão global.





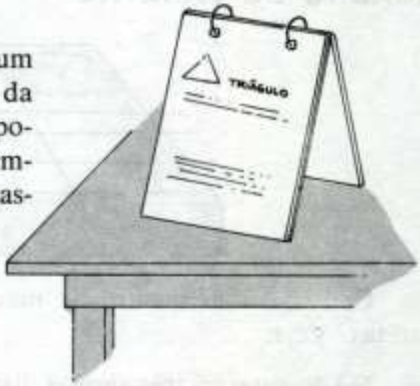




ÁLBUM SERIADO

Constitui-se de folhas de cartolina em tamanho natural e duas capas de papelão, do mesmo tamanho das folhas, que ajudam o álbum a manter-se em pé sobre a mesa. Pode-se também utilizar um cavalete para apoiá-lo. As folhas e as capas devem ser presas numa das extremidades com argolas grandes, que permitam virar as páginas com facilidade.

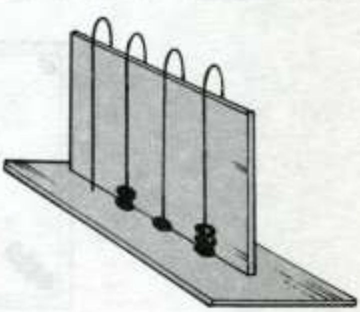
Em cada página coloca-se um assunto, em seqüência. O verso da página anterior, que fica à mostra, pode ser usado para anotações e lembretes para quem está expondo o assunto.



O álbum seriado é ótimo para atividades seqüenciais, problemas encadeados e conhecimentos classificados e ordenados. Exemplo: quando a classe já estiver conhecendo várias propriedades das figuras geométricas, colocar numa página do álbum seriado o triângulo com tudo que se refere a ele; na página seguinte, fazer o mesmo com o quadrilátero e assim por diante.

ÁBACO

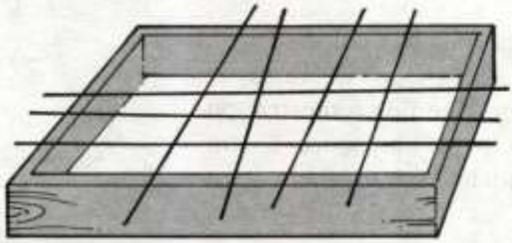
Em cada arame ficam até dezoito bolinhas, o que é igual a $9 + 9$. Assim, é possível efetuar operações com empréstimos. Veja, na figura ao lado, como se representa o número 213 no ábaco.



Observar que a ação de puxar as bolinhas é importante para ajudar o aluno a adquirir a noção de um a mais.

Além do ábaco mostrado na figura, existem outros tipos, encontrados em mesas de jogos, nos chamados "cadeirões" de crianças e em outras formas.

QUADRO DE VARETAS



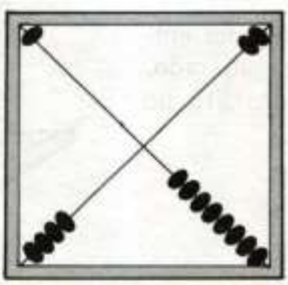
Consiste num quadro de madeira em cima do qual se colocam varetas. Veja:

No desenho há três varetas dispostas de lado e quatro de comprido; logo, são doze (3 × 4) cruzamentos. O jogo é simples: colocar as varetas e perguntar ao aluno o número de cruzamentos obtidos.

Atenção para um detalhe: o quadro não pode ser liso em cima, para que as varetas não rolem; alguns preguinhos resolvem o problema.

QUADRO PAED

Como mostra a figura, trata-se de um quadro com dois arames cruzados; em cada uma das extremidades há um número fixo de bolinhas unidas entre si: uma, duas, quatro e oito.

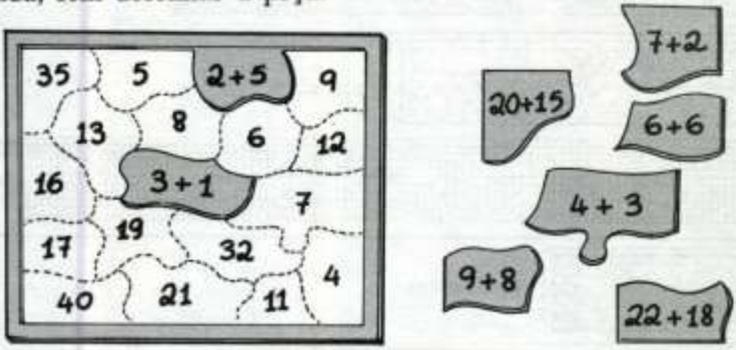


O jogo é o seguinte: dizer um número de 1 até 15; para representá-lo, o aluno puxa as bolinhas para o centro do quadro. Sirva de exemplo o número 7. Devem ser puxadas $4 + 2 + 1$ bolinhas. Há variações. Pode-se dizer um número qualquer de 1 a 15, e o aluno puxa para o centro o número de bolinhas que faltam para chegar ao 15; dizendo 6, por exemplo, o aluno puxa 9 bolinhas.

Os jogos com o quadro Paed envolvem associatividade e comutatividade.

QUEBRA-CABEÇA ARITMÉTICO

Conseguir um quebra-cabeça comum e, em cima de cada peça, colar um papel com indicação de uma conta. Fazer um tabuleiro com uma margem em volta, mais alta, para que as peças não se desloquem. Nesse tabuleiro, escrever, no lugar de cada peça, o resultado da conta indicada, sem desenhar a peça.



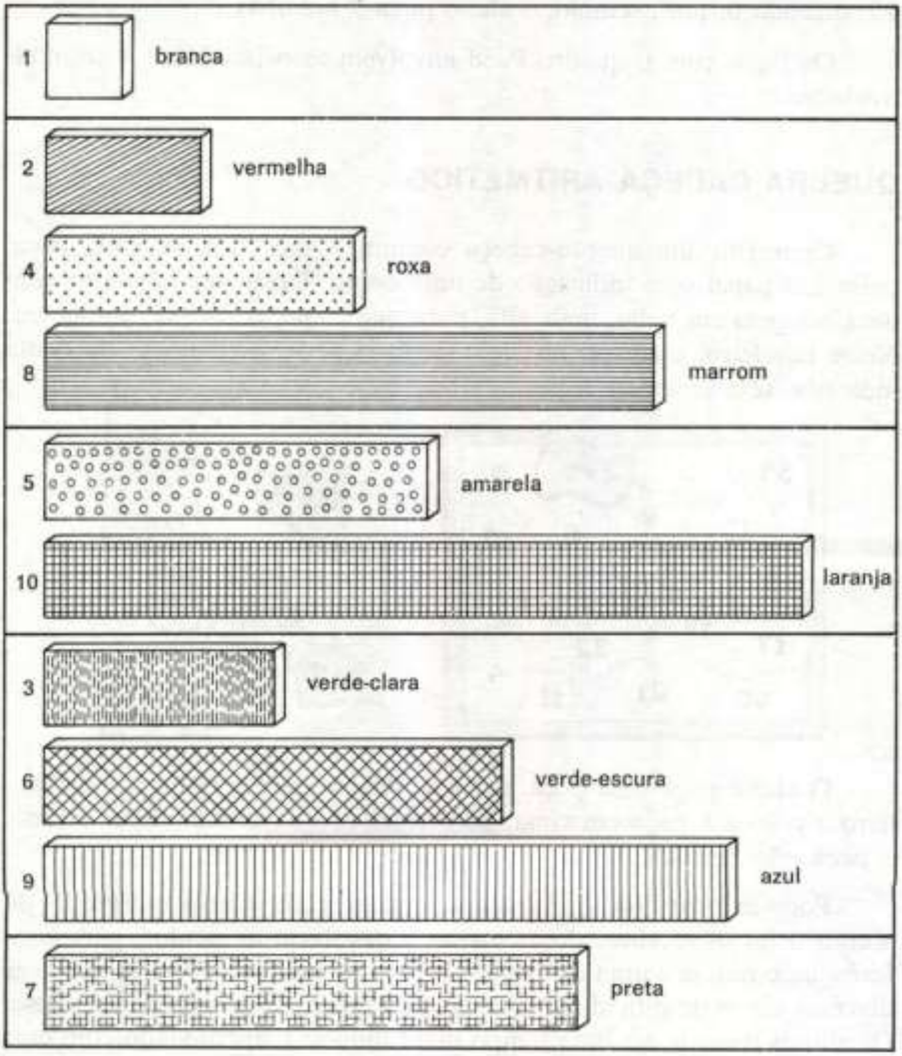
O aluno pega uma peça, faz a conta, procura a resposta no tabuleiro e coloca a peça em cima. Se o resultado da conta estiver errado, a peça não encaixa.

Pode-se usar um quebra-cabeça para cada aluno ou grupo de alunos. Eles os recebem desmontados e devolvem montados, para conferência, o que já é uma avaliação. As contas indicadas podem envolver diversos níveis de dificuldade, até frações mistas, dependendo da classe. Os alunos passam um bom tempo divertindo-se e aprendendo com esse material.

Existe, no mercado, um jogo parecido, com 49 peças de plástico; é o "Instrutor Otto", produzido pela Bender.

MATERIAL CUISENAIRE

É constituído de barrinhas de madeira cujo comprimento varia de 1 a 10 centímetros. Para cada comprimento há uma cor. São muitas barrinhas de comprimentos diferentes, num total, geralmente, de 241.



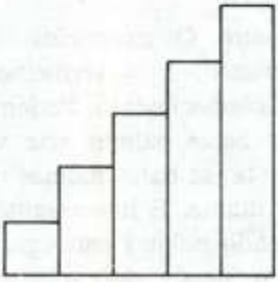
Existe à venda no mercado, mas pode ser confeccionado em cartolina ou outro material semelhante. Muitas atividades realizadas com o material Cuisenaire podem ser refeitas em caderno quadriculado.

Sugestões de atividades

1. Jogo livre. As crianças brincam e fazem montagens, familiarizando-se com o material e usando a criatividade. Podem fazer classificações espontâneas por cor/tamanho ou outras.

2. Atividades que aumentam a familiaridade com as barras:
   a) Formar trenzinhos com barras da mesma cor.
   b) Formar trenzinhos com dois tipos de barras ou mais.

3. Jogo da ordem. Para começar, podem-se formar escadas com as cinco barras menores.



   Depois, aumenta-se a quantidade. Escadas, faltando barras, podem induzir, por exemplo, que $2 < 5 < 6$; porém não se deve falar em números, por enquanto. Pode-se perguntar:
   — Qual a barra menor?
   — Qual a maior?
   — Qual vem depois da vermelha?
   — Qual vem antes da vermelha?
   — Qual está faltando?

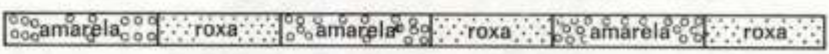
4. Composição. São as quatro operações de forma concreta; os chamados *trens de contas*. Exemplos:
   — Quantas barras brancas precisamos para formar uma barra do tamanho da vermelha? E da verde-clara?
   — Com quantas vermelhas formamos uma roxa?
   — Você pode formar uma barra como a roxa, usando somente barras de uma mesma cor? (Resposta: quatro brancas ou duas vermelhas.)

Esse tipo de atividade já começa a formar noções de estruturas dos números (as quatro operações, frações, números primos etc.). Os números primos só podem formar trenzinhos de barras iguais se elas forem unitárias. Exemplo: $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$. Com o 6, há outras possibilidades, como: $2 + 2 + 2$; logo, 6 não é primo.

5. Jogo do tato. Se os alunos sabem de cor as cores das tabuinhas, podem descobrir a cor de uma delas pelo tato. Ficam de mãos para trás; o professor coloca uma barrinha nas mãos de cada um e pede que digam a cor, sem olhar. É possível que precisem comparar com outras conhecidas.

6. Identificação cor/número. Os exercícios anteriores devem levar à identificação: 1 = branco; 2 = vermelho; 3 = verde-claro etc. É preciso avaliar esse conhecimento. Podem ser feitos alguns jogos, como: se o professor bater palmas sete vezes, os alunos devem mostrar a barrinha preta; se bater palmas quatro vezes, a barrinha amarela, e assim por diante. É interessante pedir a um aluno que comande o jogo, batendo palmas em lugar do professor. Jogos do tipo *um a mais, um a menos, dois a mais* também se prestam a essa atividade.

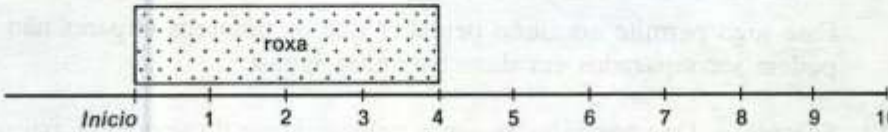
7. Noção de inclusão. Fazer um trenzinho, usando somente duas cores. Exemplo: três barras amarelas e três roxas.



Perguntar:
— Se tivesse usado seis barras, todas roxas, o trem seria mais comprido ou mais curto?
— E se usasse seis amarelas?
Essa atividade desenvolve a noção de inclusão.

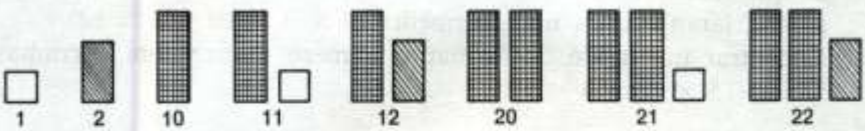
8. Formação de números. Descobrir que:
a) duas barras brancas formam uma vermelha;
b) três brancas formam uma verde-clara;
c) uma branca e uma vermelha formam uma verde-clara.

9. Localizar os números na reta numérica:

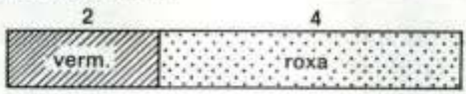


10. Ordem numérica. Repetir a atividade do item 3, mas agora falando em números.

11. Outras bases. Para formar, por exemplo, o número 23, tomar duas barras laranja e uma verde-clara (base 10). O 12 é formado com uma base laranja e uma vermelha. Para a base 3, por exemplo, usar apenas as brancas, vermelhas e verde-claras; assim:

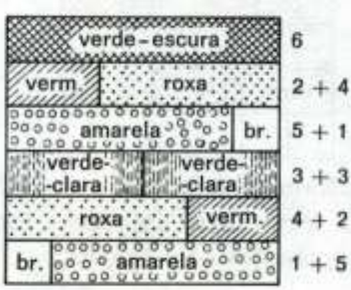


12. Adição. Juntar duas barrinhas e pedir uma barra do mesmo comprimento das duas juntas.



Na figura, uma barra vermelha mais uma roxa equivalem a uma verde-escura, isto é, $4 + 2 = 6$. Começar com somas menores que cinco.

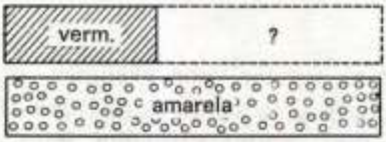
13. Jogo de separar em dois. O professor escolhe uma barrinha, e o aluno deve encontrar duas outras que, juntas, dêem o mesmo comprimento. Há várias soluções possíveis:



Outra possibilidade é usar três barrinhas, fixando, nesse caso, a propriedade associativa da adição.

Esse jogo permite ao aluno perceber que os números ímpares não podem ser separados em duas barrinhas iguais.

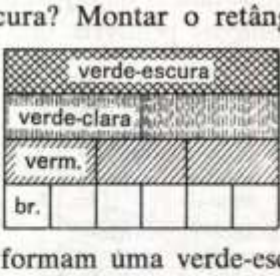
14. Subtração. Que barrinha devemos colocar junto da vermelha, para que ela fique tão comprida quanto a amarela?



15. Multiplicação. Três barrinhas vermelhas equivalem a uma barra de que cor? ($3 \times 2 = 6$). Quatro barrinhas verde-claras equivalem a uma laranja mais uma vermelha ($4 \times 3 = 10 + 2 = 12$). Encontrar um modo de formar o número quinze com barrinhas iguais (15×1 ou 3×5).

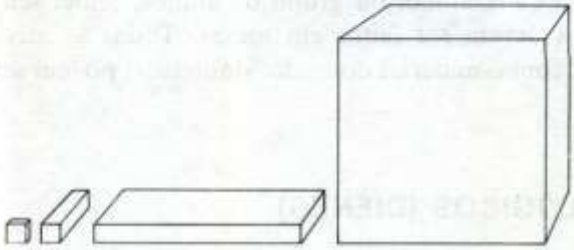
16. Divisão. Quantas barrinhas verde-claras são necessárias para formar quinze? ($15 =$ laranja $+$ amarela).

17. Frações. Quantas barrinhas amarelas são necessárias para formar uma laranja? O aluno coloca duas amarelas ao lado ou por cima da laranja para descobrir que a laranja é o dobro da amarela e que a amarela é a metade da laranja. Começa a descobrir que metade mais metade forma um inteiro. A mesma atividade pode ser feita com azul e verde-claro, para estudar o terço, e assim por diante. A barrinha vermelha é um terço da verde-escura. A verde--clara é metade da verde-escura. Qual a maior? Um terço ou metade da verde-escura? Montar o retângulo como no desenho:



Quantas brancas formam uma verde-escura? Falar em um sexto. Mostrar que um sexto mais um sexto formam um terço. Este material leva às operações com frações.

MATERIAL DOURADO MONTESSORI



São peças de madeira de quatro tipos:

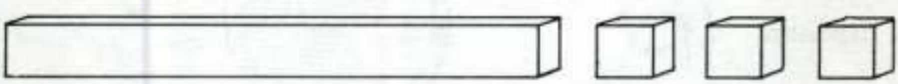
- cubo de $1 \times 1 \times 1 \text{ cm}^3$
- barra de $1 \times 1 \times 10 \text{ cm}^3$
- placa de $1 \times 10 \times 10 \text{ cm}^3$
- cubo de $10 \times 10 \times 10 \text{ cm}^3$

Serve para a compreensão do sistema decimal de numeração. É útil também para desenvolver a noção de volume.

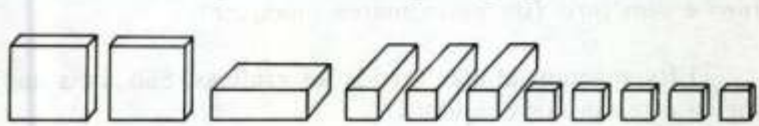
Sugestões de atividades

1. Estabelecer correspondência entre as peças. Perguntar, por exemplo:

— Treze cubinhos correspondem a quê? (A uma barra e três cubinhos.)



2. Dar um número e representá-lo com o material. Em seguida, representar um número e pedir ao aluno que diga qual é esse número.

2135 → 

3. Fazer as operações de modo semelhante às do cavalu. É importante que cada aluno, ou grupo de alunos, tenha seu material. Os trabalhos devem ser feitos em mesas. Todas as atividades desenvolvidas com o material dourado Montessori podem ser desenhadas.

BLOCOS LÓGICOS (DIENES)

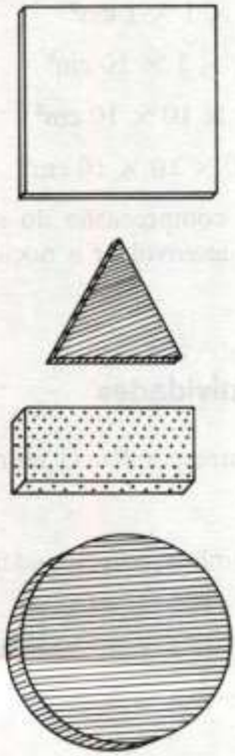
São 48 blocos de madeira ou plástico.

Formas: quadrados, triângulos, retângulos, círculos

Cores: vermelho, azul, amarelo

Tamanho: grande, pequeno

Espessura: grosso, fino



Os blocos lógicos podem também ser confeccionados em cartolina, eliminando-se o atributo *espessura* ou trocando *grosso e fino* por *com furo e sem furo* (ou outra marca qualquer).

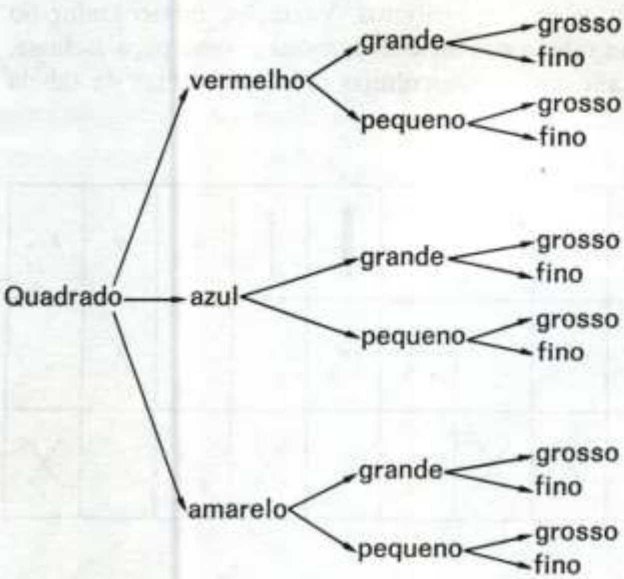
Eles sugerem muitas atividades gráficas. São úteis nas noções de lógica e teoria dos conjuntos.

Sugestões de atividades

1. Jogo livre. Promove a familiarização com o material e dá vazão à criatividade. As crianças podem começar as primeiras classificações espontâneas por cores, formas etc. Começam a dar nomes como "telhado" ou "chapéu" aos triângulos, "bola" ao círculo etc.

2. Jogo do reconhecimento. Pedir que o aluno mostre o quadrado, vermelho, grande, fino ou então o triângulo, azul, pequeno, fino. Fazer depois o contrário: mostrar uma peça e pedir os atributos (são sempre quatro).

   Formar conjuntos, por exemplo: conjunto dos quadrados, conjunto das peças vermelhas etc. Pode-se fazer, com um giz, uma curva simples fechada no chão e ali colocar as peças do conjunto. No conjunto dos quadrados, por exemplo, devem existir doze peças:



   As peças devem estar dispostas de tal modo que, se o professor retirar uma, o aluno notará sua falta. Este é um jogo que pode ser feito também com outra forma, cor, tamanho ou espessura.

3. Mostrar duas peças e pedir que os alunos apontem as diferenças. Exemplo: um quadrado, vermelho, grande, fino e um círculo, vermelho, grande, grosso. Nesse caso, as diferenças serão duas: a forma e a espessura.

4. Jogo do trenzinho de uma diferença, nem mais, nem menos. Distribuir as peças pelas crianças. Uma delas começa o jogo, colocando no centro da mesa uma peça qualquer (um círculo, azul, *pequeno*, grosso); a segunda criança deve colocar ao lado da primeira peça uma outra que possua uma diferença e três permanências (um círlo, azul, *grande*, grosso) em relação à primeira; a brincadeira continua tendo como referência qualquer uma das peças das pontas. Quem não tiver a peça adequada fica sem jogar.

   Organizar outros jogos, como o do trenzinho com duas diferenças e duas permanências; com três diferenças e até com quatro.

5. Desenho das peças. Mostrar uma peça, e os alunos fazem o desenho, reproduzindo os quatro atributos. Variação: mimeografar ou fazer na lousa uma tabela dos atributos; mostrar uma peça à classe, e os alunos colocam um × nas colunas correspondentes da tabela de atributos.

									Az	V	Am
V	X					X	X			X	
Am				X	X			X			X

   O primeiro exemplo é o de um quadrado, pequeno, grosso e vermelho. O segundo é de um círculo, grande, fino, amarelo.

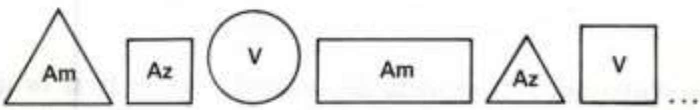
6. Correspondência. Formar dois conjuntos arbitrários, e o aluno deve dizer onde há mais (sem contar). Ele pode ir colocando uma

peça de um conjunto sobre uma peça de outro, formando pares. Com isso, verifica de que lado sobram peças.

7. Jogo da seriação. Colocar algumas peças em fila para o aluno descobrir a regra e continuar.

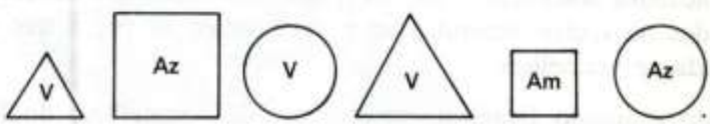
Exemplos:

a)



Resposta: amarelo, azul, vermelho, amarelo, azul, vermelho etc. Seqüência de cores. Quaisquer formas.

b)

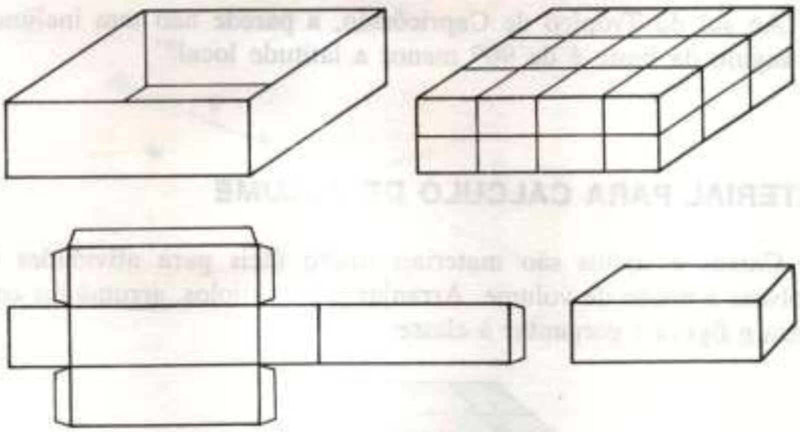


Resposta: triângulo, quadrado, círculo, triângulo, quadrado, círculo etc. Seqüência de formas. Quaisquer cores.

8. Jogo do não. Pedir uma peça que *não* tenha determinado atributo. Exemplo: formar o conjunto das peças que *não são* triângulos etc. Esse jogo familiariza a criança com a negação, com o conjunto complementar.

Mostrar uma peça e pedir ao aluno que diga tudo o que ela não é. Exemplo: pegar um retângulo amarelo, pequeno e fino. O aluno diz que essa peça não é quadrado, não é círculo, não é triângulo, não é azul etc. Outro exemplo: formar uma torre de triângulos; em seguida, mostrar um quadrado e perguntar por que essa peça não está na torre. A resposta deverá ser: — Porque não é triângulo.

Preparar uma caixa grande e 24 caixinhas iguais. Estas, quando empilhadas, devem ficar com a mesma configuração da caixa grande, cabendo dentro dela. As caixinhas podem ser feitas pelos próprios alunos.



A experiência consiste em mostrar que as 24 caixinhas cabem exatamente dentro da caixa grande. Portanto, esta mede 24 caixinhas.

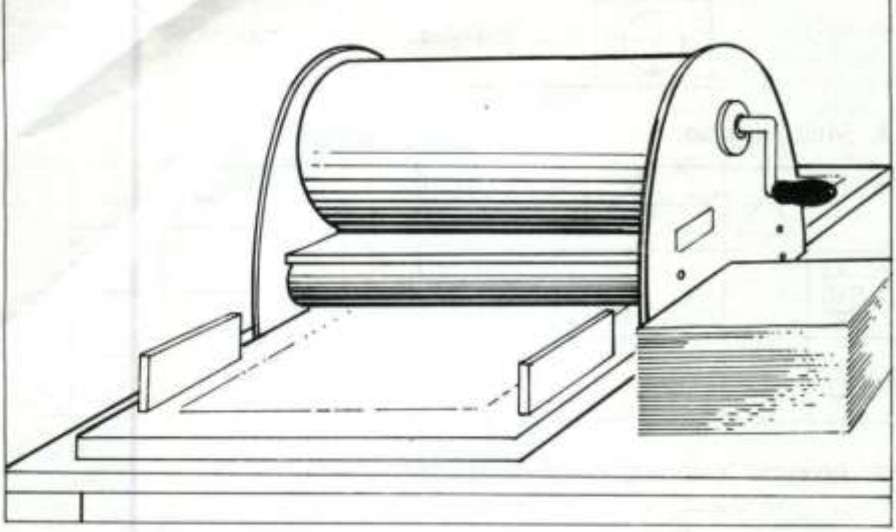
Em seguida, encher uma caixinha com areia e despejar na caixa maior. Repetir até que ela fique completamente cheia, ou seja, 24 vezes. A areia se esparrama, mas é como se a caixa estivesse cheia de caixinhas de areia. Conseguir imaginar isso exige a noção de conservação da massa.

Essa atividade pode ser feita com outros números e outros materiais, como água, bolinhas de isopor etc.

MIMEÓGRAFO

O mimeógrafo assumiu uma importância muito grande no ensino da 1.ª à 4.ª série. Isto se deve à eliminação do livro de atividades justamente quando se percebeu que *fazendo* o aluno aprende melhor. Certos livros de atividades foram muito importantes para o processo de ensino-aprendizagem, pois o aluno não apenas escrevia *no* livro, mas

MIMEÓGRAFO A ÁLCOOL



escrevia *o próprio* livro. Era posse dele. Todas essas riquíssimas atividades foram abolidas por motivos econômicos e também porque esses livros, em sua maioria, eram apenas descartáveis.

No entanto, é impossível ensinar Matemática nas primeiras séries sem atividades de preencher, riscar, desenhar, colorir, colar, escrever. Essa carência pode ser suprida pelo mimeógrafo, mesmo sem os recursos gráficos industriais e as composições e desenhos profissionais.

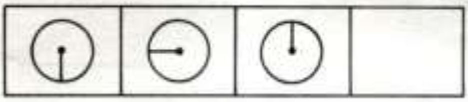
Com um pequeno mimeógrafo a álcool, estaremos possibilitando inúmeras atividades, reforçando o que julgarmos necessário, testando exercícios novos que criarmos, iniciando abstrações com material concreto etc.

Sugestões de atividades

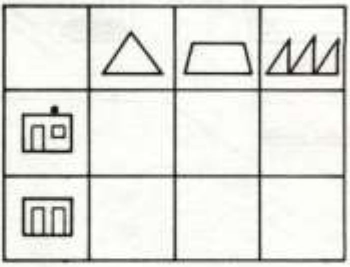
1. Atividades de desenvolvimento de habilidades, como coordenação e discriminação sensorial e motora.

2. Atividades com conjuntos. Cercar, estabelecer correspondência com riscos, setas etc.

3. Completar seqüências:

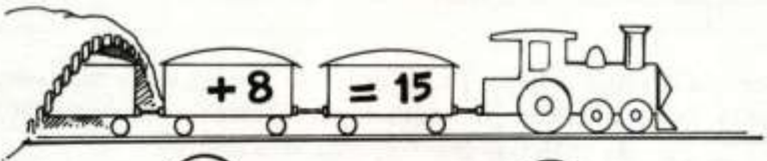


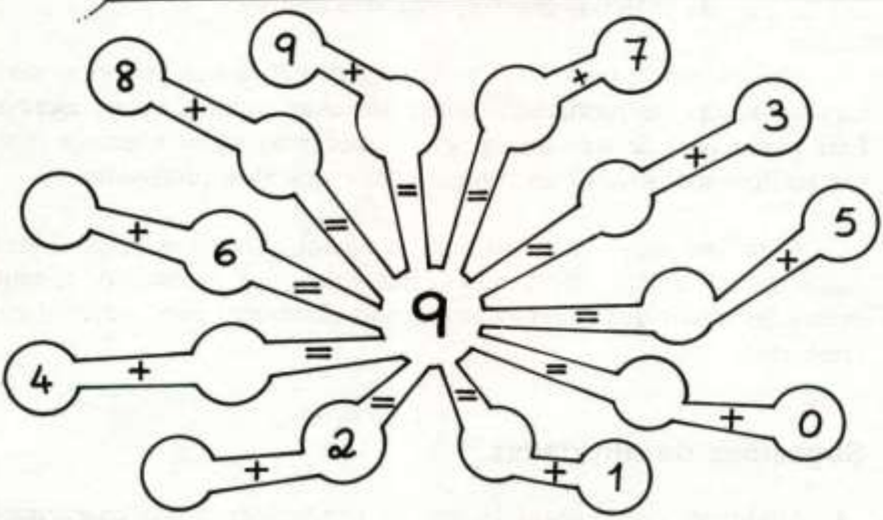
4. Multiplicação:



	ra	ga	na
pe			
ce			
fi			

5. Inventar histórias, usando números e operações:

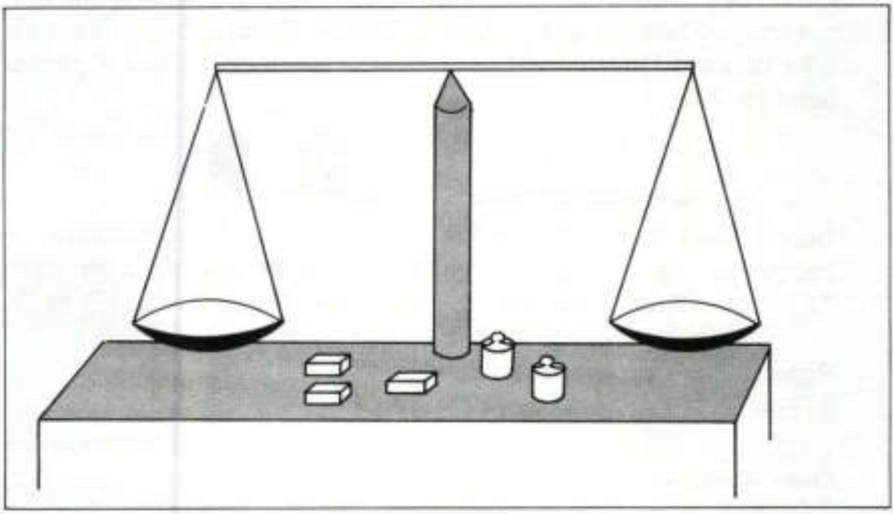




Enfim, são inúmeras as atividades que podem ser feitas com o auxílio do mimeógrafo, sugeridas pelo próprio conteúdo e, em particular, pelas *camelidades malbatahânicas*, que veremos no último capítulo deste livro.

BALANÇA

Só se deve ensinar Álgebra a alunos que já atingiram o estágio das operações formais, a menos que se consiga um recurso que leve à ação concreta da criança. A balança de pratos (qualquer uma, até mesmo feita de madeira) serve para isso.



São necessários cerca de doze pesos iguais que representarão 1 kg e ainda alguns pacotes, todos iguais, porém de 1 kg, 2 kg e 3 kg (dos "quilos" usados na balança). Basta colocar areia no pacote e "pesar".

Sugestões de atividades

1. Jogo livre. Propor situações que levem o aluno a conhecer a balança; perguntar:

— Se eu colocar 1 kg deste lado, o que acontece?

— E se eu colocar do outro?

— E se eu colocar um de cada lado?

— E se eu, tirar um deste lado?

2. Pesar os pacotes. Os alunos vão descobrir que há pacotes de 1 kg, 2 kg e 3 kg, mas, aparentemente, são todos iguais.

3. Descobrir o desconhecido concretamente. Colocar um pacote e mais 2 kg de um lado e 4 kg do outro. Quanto pesa o pacote? Ele pesa 2 kg, porque $2 + 2 = 4$.

Fazer essa atividade metodicamente: tirar 1 kg de cada lado e mostrar aos alunos que a balança não se desequilibra; tirar mais 1 kg de cada lado, de modo que fique no prato apenas o pacote pesando 2 kg.

Repetir essa atividade algumas vezes, variando os números: 1 pacote + 3 kg = 4 kg, $1 \square + 2 = 5$ etc. Depois, um novo tipo: $2 \square = 6$. Tirar a metade de cada lado, ficando com: $\square = 3$.

Repetir com outros números:
$2 \square = 2$, $3 \square = 6$ etc.

Finalmente, atividades do tipo:
$2 \square + 1 = 5$ etc.

4. Associar o concreto com o abstrato. O aluno faz o exercício na balança, e o professor escreve; depois, tudo é feito pelos alunos. Exemplo:

$2 \square + 3 = 5$
Tirar 3 de cada lado.

$2 \square = 2$
Tirar a metade de cada lado.

$\square = 1$
Conclusão: o pacote pesa 1 kg.

Repetir essa atividade com outros números: $2\square + 1 = 7$, $3\square + 2 = 5$ etc.

Muitos alunos resolvem de cabeça. Isso deve ser encorajado, mas também deve ser dito que é preciso aprender os dois métodos.

5. Propor exercícios do mesmo tipo dos anteriores, para serem resolvidos apenas abstratamente:

$3\square + 2 = 8$ Tirar 2 de cada lado.	$3\square = 6$ Dividir por 3 dos 2 lados.	$\square = 2$ Conclusão: o pacote pesa 2 kg.

Repetir muitas vezes.

Aumentar os números: $4\square + 5 = 13$, $3\square + 5 = 11$, $5\square + 7 = 22$ etc.

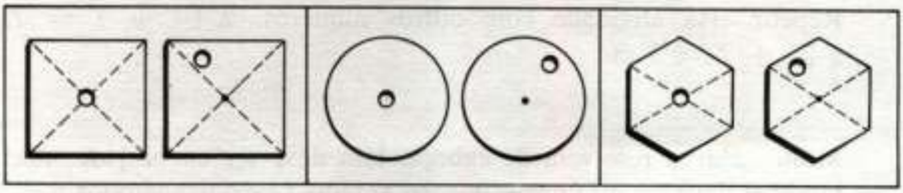
Complicar um pouco mais:

$3\square + 1 = 2\square + 3$	Tirar 1 de cada lado
$3\square = 2\square + 2$	Tirar 2 pacotes de cada lado.
$\square = 2$	Conclusão: o pacote pesa 2 kg.

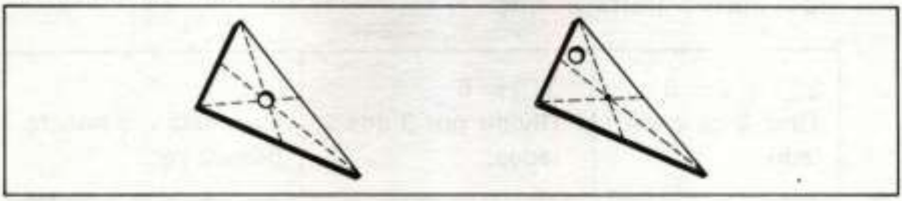
E assim por diante, como: $4\square + 3 = 2\square + 9$ etc.

MATERIAL PARA DETERMINAÇÃO DO CENTRO DE FIGURAS

Fazer dois quadrados de papelão ou madeira. No primeiro, fazer um furo no centro (encontro das diagonais); no segundo, o furo fica fora do centro. Pendurar em dois pregos na parede. O primeiro quadrado fica parado em qualquer posição, indiferentemente. Já o segundo balança até parar, sempre na mesma posição, com o centro bem embaixo do furo. Fazer o mesmo com um círculo, um hexágono etc.



Quando a figura não é regular, o problema fica mais complicado. No triângulo, o centro é ponto de encontro das medianas (ligar cada vértice ao meio do lado).



Essas experiências dificilmente dão resultados perfeitos, pois as figuras nunca ficam exatas. Mas são ricas. Por tentativa e erro, descobrir centros de outras figuras, como um quadrilátero irregular. Para balancear, colar pequenos papéis no lado mais leve (o de cima). Se as figuras forem de madeira, o balanceamento pode ser feito com pregos.

BIBLIOTECA E MUSEU

Como já foi dito na introdução deste capítulo, o laboratório de Matemática pode incluir, além de todos os materiais e recursos que acabamos de ver, uma biblioteca e um museu.

Da biblioteca podem constar, além de livros específicos de Matemática para consulta de professores e alunos (algumas sugestões podem ser encontradas no final deste livro, na bibliografia, assinaladas com asterisco), obras de literatura infantil que envolvam algum assunto relacionado à Matemática.

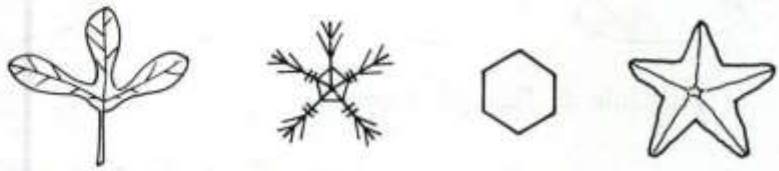
Quanto ao museu, deve reunir os mais variados materiais, que poderão ser utilizados para enriquecer atividades realizadas em aulas de Matemática e mesmo de outras matérias.

Apresentamos a seguir uma lista de coisas que podem fazer parte desse museu.

Sugestões de materiais

1. Coleções classificadas de objetos naturais, representando números ou figuras:

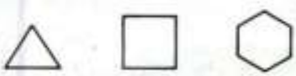
a) Folhas com uma, duas, três, quatro e cinco partes.
b) Flores e frutos.
c) Insetos (seis patas), aracnídeos (oito patas), estrela-do-mar (cinco pontas) etc.
d) Formas: caracol, girassol, cristais, favos etc.



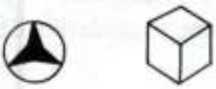
2. Coleções classificadas de objetos:

a) Caixas, copos, velas etc.

b) Ladrilhos:



c) Símbolos comerciais:



3. Fotos, recortes e cartazes de trilhos, objetos, construções, arco-íris, planetas etc.

4. Ampulheta, calendário, régua de cálculo e relógio de sol.

5. Trançados: cestos, tanga, arco-e-flecha etc.

6. Cerâmica: formas, desenhos decorativos etc.

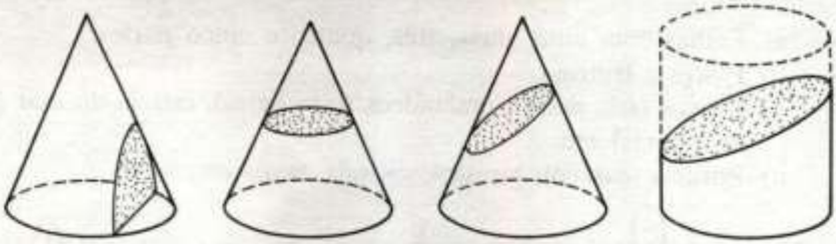
7. Odômetro (pode ser de carro).

8. Cartazes:

a) Sistemas de numeração egípcio, babilônico, grego, maia.
b) Números triangulares e números quadrados.

c) Quadrados mágicos.

d) Elipse, hipérbole, parábola e círculo, como cortes de um cone (ou de um cilindro para elipse). Podem ser sólidos de madeira.



e) Triângulo de Tartaglia-Pascal:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

A soma de dois números vizinhos é o de baixo ($3 + 1 = 4$, $4 + 6 = 10$ etc.). Pode-se continuar o triângulo: a próxima linha seria 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1. As crianças poderão descobrir muitas propriedades, como:

- A soma da linha em que o segundo número é 4 vale $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$, que é o mesmo que $2 \times 2 \times 2 \times 2$, com quatro 2 multiplicados (2^4).

  Outro exemplo: $1 + 3 + 3 + 1 = 2 \times 2 \times 2$, com três 2 multiplicados (2^3).

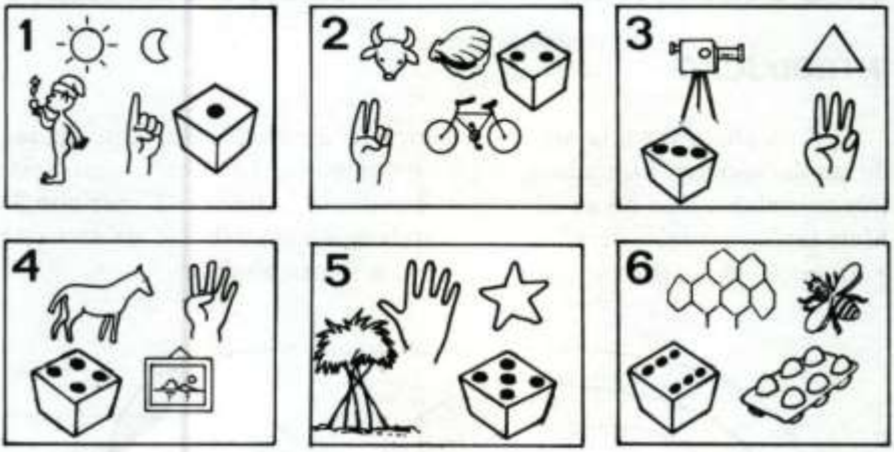
- A segunda linha é 11, a terceira é $121 = 11 \times 11$, a quarta é $1\,331 = 11 \times 11 \times 11$ etc. (A partir da sexta linha não se pode fazer o "vai um".)

- Em cada linha, a soma do 1.º + 3.º + 5.º + ... é igual à soma do 2.º + 4.º + 6.º + ... Exemplo: na quinta linha, $1 + 6 + 1 = 4 + 4$.

- Descendo pelas diagonais: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, $1 + 3 + 6 = 10$, $1 + 1 + 1 + 1 = 4$.

f) Colagem de fotos de matemáticos: Euler, Pitágoras, Gauss, Euclides, Leibniz, Lagrange, Laplace, Cauchy, Dedekind, Cantor, Hilbert etc.

g) Cartazes de números.



h) Cartaz de um relógio com os ponteiros móveis.

9. Dominó, dados e baralhos.

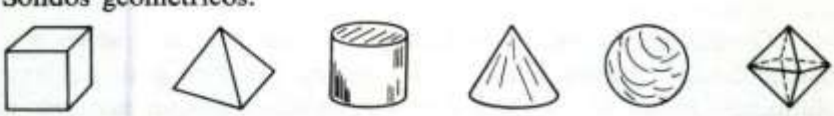
10. Ábaco.

11. Quebra-cabeças: de arame, de montar figuras, de madeira, de encaixe.

12. Cadeado com segredo numérico.

13. Torre de Hanói (ver capítulo 6).

14. Sólidos geométricos:



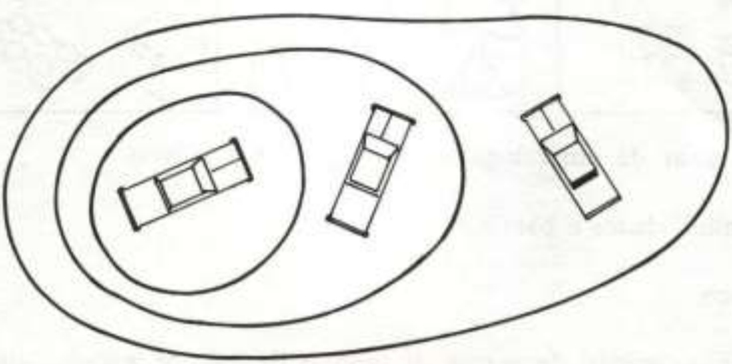
15. Sucatas, caixas, objetos.

Aritmética

Capítulo 4

INTRODUÇÃO

Com cinco ou seis anos, a criança já é capaz de contar, apesar de ainda não ter formado a noção de número. Ela conta um, dois, três carrinhos como quem dá nomes: carrinho 1, carrinho 2, carrinho 3. Mais tarde, a noção de número se estabelece como síntese da *seriação* e da noção de *classe-inclusão*. Observe a figura abaixo:



O número 3 pressupõe inclusões seriadas: o conjunto de um carrinho contido num conjunto de dois carrinhos e este, num de três; o 1 incluído no 2, o 2 no 3. Com isso, estará estabelecida a estrutura abstrata de número: $3 = 2 + 1 = (1 + 1) + 1$ etc. Essa estrutura possibilita várias operações aritméticas. A criança, neste estágio, já faz $2 + 3 = 2 + 1 + 1 + 1 = 5$.

O objetivo do ensino da Matemática nas primeiras séries é a formação dessa estrutura. Ela se estabelece no primeiro grau, variando de aluno para aluno. O professor deve ter em mente sempre isto: *não existe uniformidade*, e essa defasagem natural não é motivo para reprovação.

Verificar-se-á que as atividades aqui propostas são diferenciadas de acordo com o objetivo. Às vezes, o objetivo é formar conceitos; outras, é aplicá-los etc.

O capítulo 6 — Camelidades malbatahânicas — é um grande auxiliar para motivação de aulas e para análise. Deve ser consultado sempre, retirando-se situações-problemas pertinentes.

O "cartaz valor do lugar" (capítulo 3) deve ser estudado antes deste capítulo.

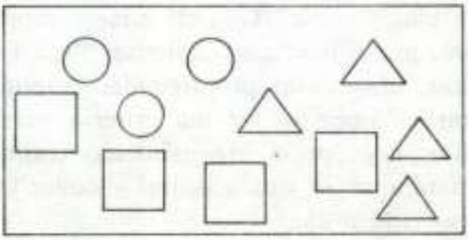
Quando se inventam problemas de Aritmética, é preciso cuidado com a questão ideológica. Existem livros nos quais quem vai à feira é sempre a mulher e quem trabalha é o homem; se surge desenho de uma empregada doméstica, ela é negra e se chama Benedita, e assim por diante. São problemas fúteis, desligados da realidade atual, que deveriam, ao contrário, envolver, além dos brinquedos (nada de bonecas para meninas e carrinhos para meninos), a realidade social: profissões, ferramentas, objetos etc. Além de joaninhas e peixinhos, todo o ambiente físico, químico, biológico e social deve ser posicionado no nível do aluno.

SUGESTÕES DE ATIVIDADES PARA A 1.ª SÉRIE

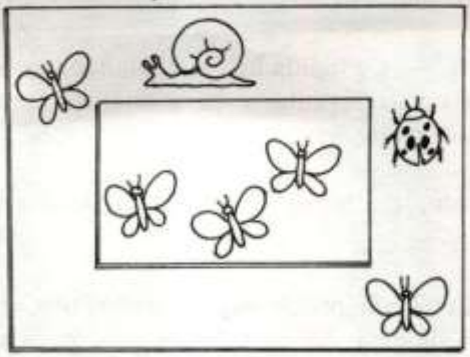
1. Exercitação pré-numérica. Atividades com conjuntos, sem usar nomes:

a) Cercar conjuntos por cores, formas, tamanhos ou utilidades dos elementos.

b) Pintar, com a mesma cor, as figuras de mesma forma ou tamanho etc.



c) Ligar elementos a conjuntos correspondentes, segundo critérios anteriormente combinados (noção de inclusão).



Atividades desse tipo podem ser feitas no flanelógrafo, com blocos lógicos ou graficamente. Tudo que for feito com material concreto deve ser refeito, se possível, graficamente. O objetivo é o desenvolvimento de habilidades, como coordenação e discriminação sensorial e motora, visando às noções de conjunto e número.

(Outras atividades podem ser encontradas no capítulo 3: flanelógrafo, itens 1 e 2; blocos lógicos, item 2.)

2. Atividades de classificação e seriação. A operação cognitiva da *classificação* é fundamental; desde a Pré-história os homens a fazem. Os *nomes* são resultantes de classificações. A palavra *cão* não é apenas nome de um animal. Ela significa que o homem distingue uma espécie de animal; *cavalo* é outra espécie; *milho* classifica um tipo de espiga etc. Já a palavra *mamífero* classifica classes de animais como cavalo, cão etc. A palavra *dois* classifica os conjuntos pares. E assim por diante.

O que veio primeiro, o ovo ou a galinha? O que veio primeiro, o conceito ou a classificação? Os dois estão sempre em mudança, um puxando o outro, numa interação dialética. Para formar o conceito, é preciso classificar, abstraindo propriedades comuns. Para classificar, é preciso formar o conceito, ter um critério para classificação. São necessários muitos anos de desenvolvimento conjunto, num processo embriológico, para que se estabeleçam o conceito e a operação de classificação associada a ele.

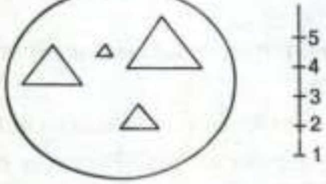
Atividades de classificação:

- Brincadeiras no pátio: separar alunos por grupos, segundo certos critérios que podem ser sugeridos pelas próprias crianças; em seguida, separar objetos de diversas maneiras.
- Blocos lógicos: classificá-los pelos atributos (cor, forma, tamanho e espessura).
- Flanelógrafo: colorir elementos de classes diferentes, cada uma com uma cor (ou marcar com A, B etc.). Colocar as figuras no quadro para o aluno realizar a atividade no caderno.

A *seriação* é outra operação cognitiva importante na formação de conceitos e estabelecimento de relações lógicas espaciais e temporais (seqüências, tempo, continuidade). Colocar em ordem é muito importante; todo projeto descreve uma sucessão de atividades. A demonstração e a argumentação são seqüências de proposições.

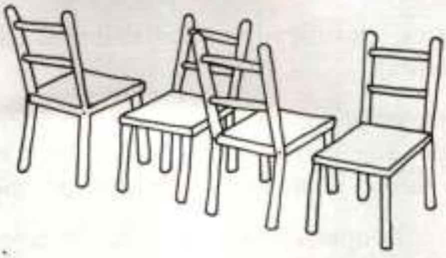
Atividades de seriação:

- Brincadeiras no pátio: fazer filas, segundo vários critérios; passar bolas pelo túnel de pernas (o último pega a bola, corre para o primeiro lugar e atira a bola pelo túnel); "pular carniça". Enfim, colocar em ordem, segundo algum critério, materiais de vários tamanhos, espessuras, tonalidades etc.
- Flanelógrafo: ligar elementos a números (no caso de já ter estudado sua ordem). Colocar as figuras no quadro para o aluno realizar a atividade no caderno.



3. Correspondência. Exercícios de ligar um a um elementos de dois conjuntos para determinar onde há mais, mesmo sem contar. Usando o flanelógrafo, blocos lógicos e outros recursos, repetir as atividades com conjuntos de mesmo número de elementos. Integrar com a atividade 1, cercando conjuntos e depois ligando elementos. Pode-se comparar o número de alunos com o número de carteiras.

Uma atividade divertida é a "dança das cadeiras": um grupo de alunos (mais ou menos oito) e uma fileira de cadeiras, uma virada para um lado, outra para o outro, de modo que haja um aluno a mais que o número de cadeiras.



Eles ficam andando ao redor das cadeiras até um dado sinal, quando devem sentar-se. Aquele que não conseguir sai do jogo, retirando uma cadeira.

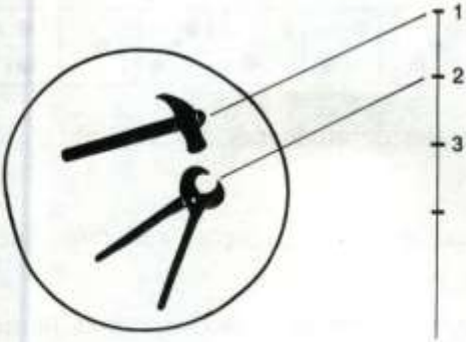
O objetivo dessas atividades é classificar conjuntos eqüipotentes (com o mesmo número de elementos), formar a classe dos conjuntos unitários, cuja abstração é o número 1, a classe dos pares, cuja abstração é o número 2 e assim por diante. Tudo sem nomenclatura. Por enquanto, o importante é o conceito. Este é o começo de um comportamento que se completará muito depois.

(Atividades que visam ao mesmo objetivo podem ser encontradas no capítulo 2, página 27.)

4. Números naturais. Estudo dos números a partir de conjuntos concretos:

- Mostrar coisas duplas, pares, casais ou agrupamentos arbitrários de duas coisas. Jogos:
  — Quantos chifres tem o boi? Quantas orelhas?
  Falar do 2 e representar no cavalu. Escrever os numerais 2, II, dois, ∘∘ etc.
- Mostrar coisas triplas ou agrupamentos de três e representar no cavalu. Escrever os numerais 3, III, três, ∘∘∘ etc. Nas atividades com números naturais, é útil o cartaz com os símbolos da 1.ª série (sugerido no capítulo anterior), que deve ficar afixado na parede, para os alunos saberem até onde chegaram.

5. Contagem. Ligar objetos a números, em ordem, um a um. Esta é a própria operação da contagem. No início, usar apenas conjuntos de até três elementos.



Objetivo: explicitar o ato da contagem.

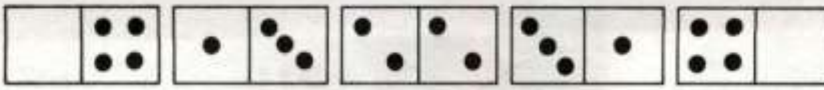
- Contar elementos de um conjunto até três e colocar o número na etiqueta. Reciprocamente, dar o número e pedir para o aluno desenhar o conjunto.
- Mostrar dois objetos e perguntar: quantos faltam para três?
- Mostrar cinco objetos e perguntar:
  — Quantos devemos retirar para ficarem três?
- Fazer a atividade graficamente e no cavalu, sem símbolos de operações.
- Propor problemas que envolvam as quatro operações. Exemplo:
  — Tenho três pirulitos para repartir por três alunos. Quantos são para cada um?
  Fazer concretamente, usando tampinhas e outros objetos.
- Treinar a escrita dos numerais até 3.

6. Outros exercícios com números naturais. Mostrar coisas que são quádruplas.

• Utilizando o cavalu, mostrar o numeral 4. Fazer o mesmo com o 5.

Propor problemas sempre bem concretos.

- Jogo do dominó (se confeccionado pelos alunos, com caixas de fósforos revestidas de papel, a atividade é ainda mais produtiva). Mostrar vários modos de formar o 4. Formar outros números.

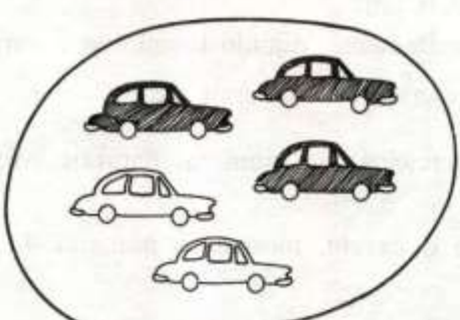


(Para outras propostas de atividades, ver capítulo 3, cavalu, itens 1 e 2.)

7. Adição e subtração. Quais as ações concretas que conduzem às noções de adição e de subtração?

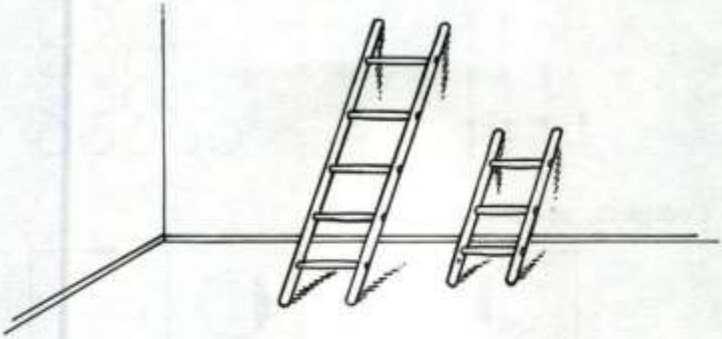
a) *Reunir—separar* — Em uma caixa há duas tampinhas e em outra há três. Reunir tudo em uma terceira caixa. Fazer concretamente e contar o total. Depois, separar as cinco tampinhas em duas caixas, o que pode ser feito de várias maneiras, inclusive desfazendo o que foi feito anteriormente (2 + 3). Mostrar concretamente que 2 + 3 é o mesmo que 3 + 2 (sem notação).

b) *Acrescentar—retirar* — Em uma caixa há três tampinhas. Acrescentar duas. Fazer concretamente e contar o total. Depois retirar duas para retornar às três.
Aqui há outro aspecto desta ação que é o de atingir um total, um nível, para mais ou para menos. Se estamos abaixo, temos de *completar*; se estamos acima, temos de *tirar* o excesso. Veja os exemplos:
— Vou pintar cinco carrinhos; já pintei três. Quantos faltam para completar o trabalho?



— No estojo estão cinco lápis, e ele não fecha a tampa, pois só cabem três. Quantos devo retirar?

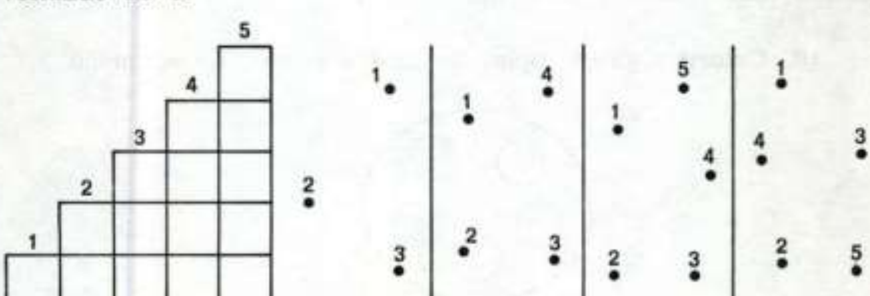
c) *Comparar* — Uma escada tem cinco degraus e a outra, três. Quantos degraus a mais a escada grande tem?



Repetir esse tipo de atividade em várias situações, com crianças, objetos etc. Sem nomes, apenas criando situações. Usar as palavras *mais* e *menos*.

Tudo isso é um começo que terminará quando tivermos a nomenclatura $a + b$, e ela não indicar mais uma operação e, sim, um número, $3 + 2$ será um numeral que indicará o mesmo número que $8 - 3$ ou $\frac{10}{2}$ ou 5 etc. Aliás, muitas vezes não devemos "efetuar" as operações, deixando-as apenas indicadas. Por exemplo: vinte e nove, deixamos assim mesmo, 29, que significa $20 + 9$, pois não existe um símbolo "simples" para esse número. São infinitos números!

8. Ordem. Ordenar de 1 até 5, sem os sinais < e >. Ligar pontos voltando ao 1.



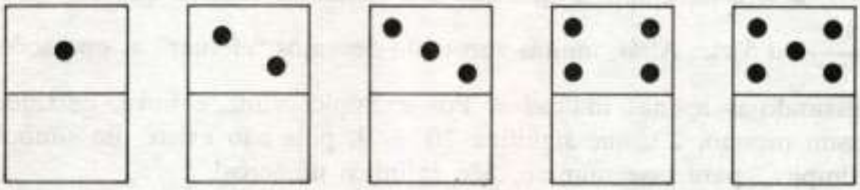
Atividades concretas:

- Formar escadinhas com palitos, com tampinhas ou no quadro de pinos.

- Completar seqüências.

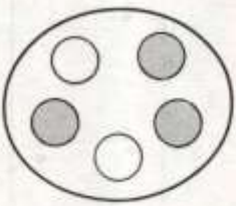
(Ver também capítulo 6.)

9. Jogo do *um a mais*. Dizer ou escrever um número até 4. O aluno diz ou escreve o número seguinte. Proceder do mesmo modo com o jogo do *um a menos*. Escrever abaixo o numeral (arábico) correspondente.



Insistir nesse tipo de exercício, com o objetivo de identificar cada número com o anterior, mais um.

10. Colorir algumas bolas de azul e outras, de vermelho.



Depois propor à classe questões como:

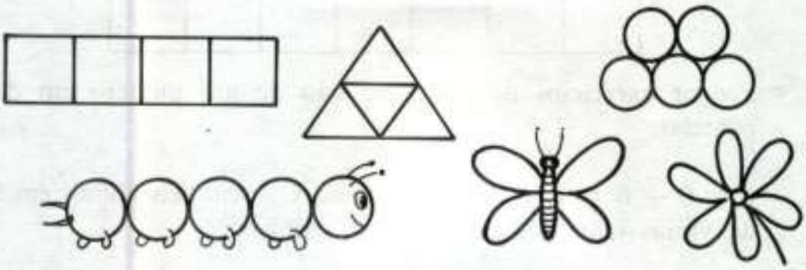
a) Quantas são as bolas azuis?

b) Quantas são as vermelhas?

c) Ao todo, quantas são as bolas?

d) Cercar as azuis e cercar as vermelhas.

Repetir o exercício com outros números, cores e formas.



(Outras atividades semelhantes podem ser encontradas no capítulo 2, à página 31.)

11. Notação. Os símbolos + (mais) e = (igual).

— A galinha amarelinha pôs dois ovos e a carijó pôs três. Quantos ovos posso juntar?

2	+	3	=	5
2	+		=	5
2		3		5

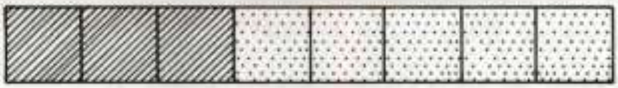
2	+	3	=	
	+	3	=	5
2	+	3		

Criar vários problemas desse tipo. Repetir a atividade 10, agora escrevendo as contas. Fazer no cavalu e no flanelógrafo. Pode-se utilizar o material Cuisenaire. É preciso que haja a ação de reunir, juntar e acrescentar para formar o conceito de adição. Pode-se usar também a disposição vertical da soma.

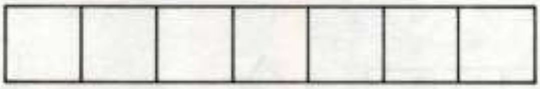
(Ver atividades sugeridas no capítulo 3: cavalu, item 3; flanelógrafo, item 7; material Cuisenaire, item 12.)

12. De zero a dez.

- Retomar as atividades de 5 a 11, com números de zero a dez.
- Representar com números:



- Colorir para representar 4 + 3:

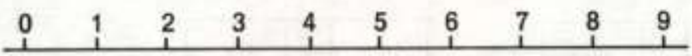


- Propor exercícios de decomposição de um número em duas parcelas:

  6 = 0 + 6 = 1 + 5 = 2 + 4 etc. Colocar seis alunos em fila de várias maneiras diferentes (batalhão).

Cuidado com o zero! Utilizar um símbolo para representá-lo, ainda é muita abstração para esta faixa etária. Não exigir tabuadas de cor, mas dar exercícios variados para que, aos poucos, elas fiquem memorizadas. Dar exercícios que induzam ao conhecimento de que um a mais, na parcela, representa um a mais na soma.

13. Reta numérica. Representar os números na reta numérica:



- Perguntar, por exemplo:

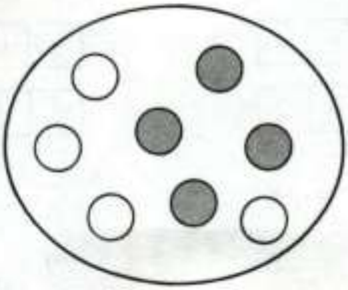
  — Quais os números vizinhos do 5?

  — Qual o número que fica entre o 6 e o 8?

- Trabalhar com números ordinais apenas verbalmente, em situações usuais, como os dias da semana (*segunda*-feira, *terça*-feira etc.).

14. Propriedade associativa. Fazer tudo com exemplos, sem preocupação de dar nome à propriedade. Propor problemas ilustrativos. Dar exemplos, usando tampinhas. Depois, formalizar cada situação. Cabe aqui o problema apresentado no capítulo 3, flanelógrafo, item 13.

15. O símbolo — (menos). Propor problemas do tipo:

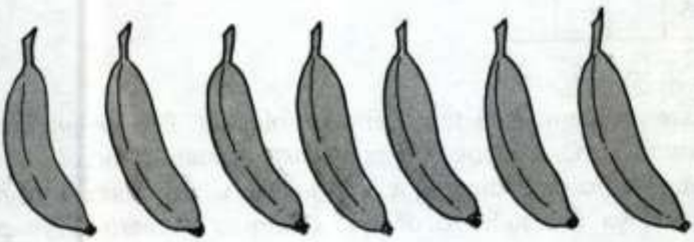


Colorir algumas bolas de azul e as outras de vermelho.

— Quantas bolas há no total?

— Quantas bolas são azuis?

— Retirando as azuis, quantas ficam?



— Se eu retirar três bananas, quantas sobrarão?

7	—	3	=	4

7	—	3	=	

7	—		=	4

	—	3	=	4

7		3		4

7	—	4		

(Para outras atividades, ver capítulo 3; cavalu, item 4; material Cuisenaire, item 13.)

16. Colocar o número que falta:

a)

4	+		=	6

	+	3	=	8

5	−		=	2

	−	4	=	3

b) $3 + \square = 8$ $\square + 5 = 7$

$\square + 4 = 5$ $9 - \square = 3$

c)

+	1	3	4
2		5	
3			
5			

d) $4 + \square = \square + 4$

Esse problema (d) tem infinitas soluções. É a *propriedade comutativa*. Os alunos vão começar a testar números. Escolher uma resposta e dizer que é a certa. Claro, haverá protestos. Isso leva à conclusão de que qualquer número serve para o lugar, ou seja, satisfaz a propriedade.

17. Problemas:

a) Inventar uma história para $\square + 3 = 7$.

b) Escrever com símbolos matemáticos e responder: Pedrinho tinha quatro figurinhas; brincou de bater figurinhas e ficou com sete. Quantas ganhou?

18. O valor do lugar. Cada número possui seus numerais. Ir aumentando a quantidade de números e a quantidade de numerais: 10, 11, 12, . . . O aluno, inicialmente, entende o 12 como um novo símbolo que vem depois do 11. Não compreende a operação mental implícita $(10 + 2)$. Vê o numeral 12 como um símbolo composto, um símbolo em dois pedaços. (Se o 12 fosse emendado, imagine o que daria 1311220 escrito sem tirar o lápis do papel. . .)

Nas adições com reserva, o aluno compreenderá melhor o valor do lugar: no 12, o 1 vale 10. Aliás, se a quantidade de números é infinita, não é possível inventar um símbolo "simples" para cada número, como acontece de 0 a 9. Os símbolos passam a ser compostos a partir do 10; passam a ter unidades e dezenas, com valor posicional. Contar de dez a vinte. Escrever os numerais. Decompor: $13 = 10 + 3$ e assim por diante. Aos poucos, ir dando os nomes: vinte, trinta etc. Decompor os nomes: noventa = nove + enta (o sufixo é genta: nona + + genta, quinqua + genta, tri + genta etc.).

19. Reta numérica até números maiores que 9. Contar de dois em dois, marcando na reta numérica, como na atividade 13. Tentar de três em três.

20. Operações com dezenas. Começar no cavalu e passar depois para o caderno, seguindo as simplificações abaixo:

d	u
2	0
+ 5	0
7	0

d	u
3	0
+ 4	0
7	0

d	u
9	0
− 2	0

d	u
8	0
− 3	0

3	0
+ 6	0

$$\begin{array}{r} 50 \\ -\,30 \\ \hline \end{array}$$

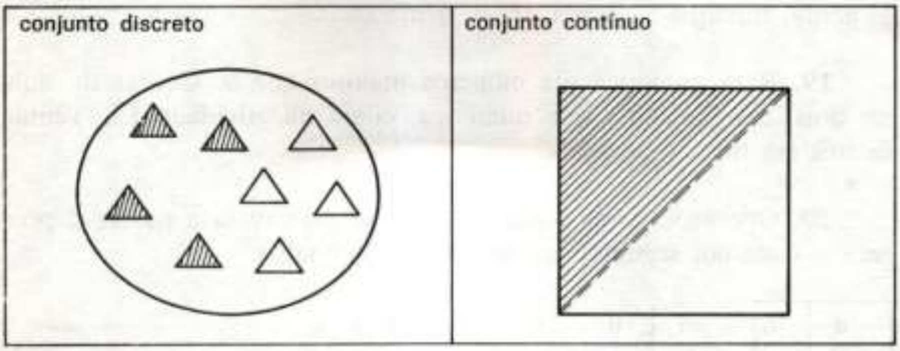
21. A dúzia e a meia dúzia. Fazer problemas relacionados com esses números.

22. Jogo do par ou ímpar. Fazer as atividades sugeridas no capítulo 3 com o cavalu (item 13) e o quadro de pinos (item 3).

23. Dobro e metade. Criar problemas que envolvam as noções de dobro e metade, usando números naturais. Construir a tabuada do dobro, sem decorar. Mostrar que todo dobro é par. Essas atividades servem de preparação para a multiplicação, a divisão e o estudo das frações.

No caso, usar somente as palavras *meio* e *metade* associadas com a palavra *dobro*, sem notação matemática. Testar o vocabulário dos alunos em exemplos concretos: meio copo de água, meio-dia, meia-lua, meio saco de milho, metade do trabalho. Recortar e apresentar gravuras com situações semelhantes. Nesta idade, as palavras meio e metade não são usadas com a precisão do adulto; as metades não são "iguais", ou melhor, não são equivalentes. Aliás, observar que, se um bolo tem, por exemplo, a forma do Brasil, podemos dividi-lo na metade, mas as partes não serão visualmente iguais, a menos que ele seja dividido em duas camadas. Normalmente, as primeiras atividades com frações são feitas colorindo-se parte de um conjunto: um conjunto de figuras (conjunto discreto) ou uma única figura (conjunto contínuo).

METADE



Portanto, nas frações, os professores trabalham usualmente com quantidades ou áreas. É preciso também operar com massa, peso, volume, tempo, trabalho e levar sempre em conta o desenvolvimento do aluno. Na 1.ª série, podemos usar conjuntos discretos e comprimentos, pois os alunos já possuem as noções da conservação do número e do comprimento. Já podemos utilizar áreas e massas sem exigir a operabilidade. (Ver, a esse respeito, o capítulo 2, página 27.)

Tipos de problemas:

- Quanto é a metade de dez?
- Quanto é o dobro de 5?
- Quantos ovos tem meia dúzia?
- Qual é o dobro de 6?
- Quanto é meia dúzia mais meia dúzia?
- Quanto é a metade de 20?

Esses problemas devem ser feitos concretamente com tampinhas, palitos de sorvetes, quadro de pinos, flanelógrafo, separando os conjuntos em duas partes iguais.

Problemas de comprimento podem ser feitos com as barrinhas do material Cuisenaire: por exemplo, encontrar duas barras iguais que, juntas, tenham o mesmo comprimento da verde-escura. Propor atividades de colorir, colar etc. Repetimos: usar somente as *palavras* meio, metade, dobro, não o símbolo $\frac{1}{2}$.

24. Multiplicação. Qual a ação concreta que leva ao conceito de multiplicação? É a soma repetida de parcelas iguais. É uma generalização do dobro. Exemplos:

- São quatro caixas, cada uma com três lápis. Quantos lápis são no total?

$$\underbrace{3 + 3 + 3 + 3}_{4 \text{ vezes}} = 12$$

- Desenhar e colorir:

	azul	amarelo	vermelho	verde
				
				
				

a) Quantos carros são azuis?

b) Quantos carros são amarelos?

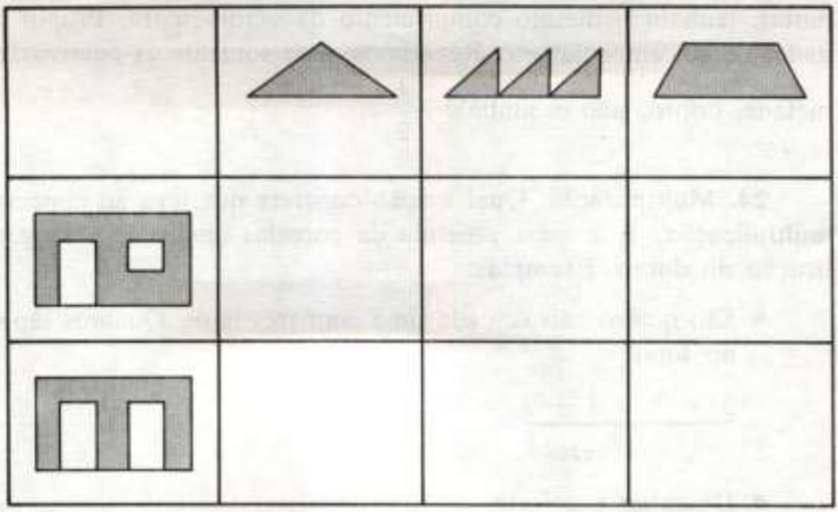
c) Quantos carros são vermelhos?

d) Quantos carros são verdes?

e) Quantos carros são ao todo?

f) $3 + 3 + 3 + 3 =$ ____. Quantas vezes o 3?

• Desenhar e colorir:



a) Quantas são as casas de telhado em ponta?

b) Quantas são as casas de telhado com três pontas?

c) Quantas são as casas com telhado achatado?

d) No total, quantas são as casas prontas?

e) 2 + 2 + 2 = ____ Quantas vezes o 2?

f) Quantas são as casas de uma porta?

g) Quantas são as casas de duas portas?

h) Ao todo, quantas são as casas prontas?

i) 3 + 3 = ____. Quantas vezes o 3?

Repetir exercícios desse tipo.

Alguns problemas:

• Um cavalo tem 4 patas. 2 cavalos têm ____ patas. 3 cavalos têm ____ patas.

• Fazer somas de parcelas repetidas:
4 + 4 + 4 = ____ Quantas vezes o 4?

Abreviar 3×4 (3 vezes 4) etc. Escrever de maneiras diferentes:

$$\begin{cases} 3+3+3+3 \\ 4 \times 3 \\ 4+4+4 \\ 3 \times 4 \end{cases}$$

Alguns exercícios:

- Indicar, sob forma de multiplicação, as seguintes somas: $5 + 5 + 5$.
- Indicar 5×2 sob forma de adição e efetuar.
- Mostrar como os egípcios efetuavam a multiplicação (ver capítulo 1).

A partir deste momento as crianças já podem começar a fazer divisões, concretamente, com tampinhas ou outro material. Essa atividade serve para motivar a multiplicação e preparar terreno para a divisão.

Pedir a um aluno que distribua seis tampinhas entre três colegas. Distribuir de uma em uma, de duas em duas, como quiser. Tirar a prova, multiplicando 3×2. Repetir a atividade de vez em quando, aumentando os números.

Essa atividade, como muitas outras, pode ser dramatizada. Um chapéu e uma gravata, e já temos um pai que vai distribuir as balas se os filhos se comportarem.

25. Tabuada do 2 e do 3. Propor exercícios e problemas, utilizando o cavalu, para que o aluno aprenda a tabuada sem decorar; a memorização vem com o uso. Utilizar a disposição vertical. Fazer perguntas do tipo:

— Quantas patas têm dois gatos?

26. Divisão. A primeira etapa é a concreta e já vem sendo feita desde o item 24 (divisão de tampinhas entre alunos ou outra atividade semelhante). Mostrar que dividir é o contrário de reunir quantidades iguais.

Numa segunda etapa, trabalhar a divisão como operação inversa da multiplicação. Dar o sinal ÷ (dividido por).

$\boxed{2}\boxed{\times}\boxed{3}\boxed{=}\boxed{6}$ $\boxed{6}\boxed{\div}\boxed{2}\boxed{=}\boxed{}$ $\boxed{6}\boxed{\div}\boxed{3}\boxed{=}\boxed{}$

Mostrar que a divisão desmancha a multiplicação (ver capítulo 3, cavalu, itens 16 e 17). Numa terceira etapa, colocar $9 \div 3 = \square$, sem a multiplicação, para os alunos fazerem como quiserem, mas estimular a divisão sempre a partir da multiplicação. Fazer perguntas do gênero:

— Qual o número que multiplicado por 3 dá 9?

Armar as divisões: $3 \times 4 = 12$; $12 \div 4 = 3$: $\begin{array}{r|l} 12 & 4 \\ \cline{2-2} & 3 \end{array}$;

Não escrever o resto da divisão por enquanto. Dar, em seguida, muitos problemas de fixação.

Começar a usar as palavras *múltiplo* e *fator*: 8 é múltiplo de 4 e 4 é fator de 8, pois $8 = 4 \times 2$. Dar os múltiplos de 2, 3 etc. Colocar em uma reta numerada. Dar os fatores de 6, 8 etc. Descobrir os múltiplos comuns a 2 e 3. Descobrir os fatores comuns a 6, 8 e outros.

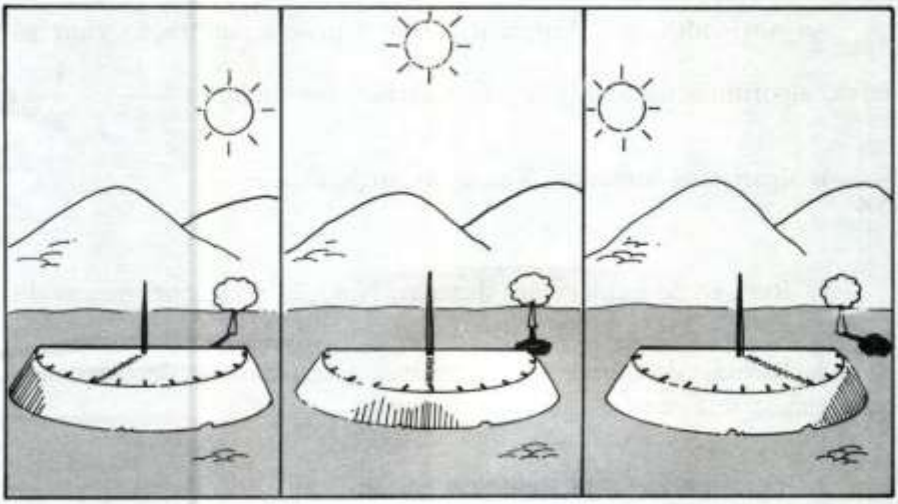
O professor deve saber que a escrita simbólica matemática não pode romper com as regras gramaticais. Toda fórmula, sentença ou expressão matemática tem sujeito e predicado. Veja a sentença: $6 \div 2 = 3$. Sujeito: $6 \div 2$; predicado nominal: 3; verbo de ligação: (é); predicativo do sujeito: 3.

27. Medida de tempo. Há muito tempo os homens não sabiam plantar. Viviam como os outros animais, catando frutos na mata, caçando e pescando.

Os índios também caçam, mas sabem plantar um pouco. Para plantar é preciso conhecer o tempo, saber qual a melhor época para colocar a semente na terra etc.

Os índios marcam o ano, olhando as estrelas. A parte do céu que se vê à noite vai mudando durante o ano e, assim, conhecendo as estrelas, dá para saber se está chegando a época das chuvas, do frio ou a época das flores. Os índios também marcam tempos curtos, contando os dias ou as luas.

Faz muito tempo, provavelmente no Egito antigo, inventaram o relógio de sol para marcar pequenos tempos.



— Observe bem os desenhos do relógio de sol. Por que a sombra da varinha vai mudando de lugar?

Mostrar uma ampulheta, um relógio de ponteiro, um relógio digital; mostrar um relógio grande de cartolina com ponteiros móveis.

Começar a leitura apenas com as horas.

28. Metro, quilo e litro. Exibir metro de pedreiro, de loja, fita métrica. Cada um tem sua utilidade. Experimentar medir a cintura com o metro de loja. Mostrar balanças. Mostrar que o litro é igual a uma caixa de 10 cm × 10 cm × 10 cm. Passar líquido ou grãos de uma lata de 1 litro para essa caixa. Fazer o mesmo com garrafas. Mostrar que 1 litro de água pesa 1 quilo. Falar somente os nomes das unidades, sem cobrar memorização e sem cobrar entendimento.

Nesse ponto, já teremos uma boa porcentagem de alunos com noções de conservação da massa, mas não de peso e volume.

SUGESTÕES DE ATIVIDADES PARA A 2.ª SÉRIE

A 2.ª série é praticamente uma ampliação da 1.ª. Os números podem chegar a 1 000, os conceitos se aprofundam, e os alunos amadurecem.

As novidades, em Aritmética, são: adição e subtração com reserva, algoritmos da multiplicação e divisão (os símbolos $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$); algarismos romanos. Vamos às atividades.

1. Revisão de numeração: dezenas. Notação posicional no cavalu.

2. Revisão de numeração: centenas. Exercícios de decomposição dos nomes: sete-centos, quatro-centos etc.

3. Transformação de centenas em dezenas e vice-versa (pode ser feito no cavalu).

4. Revisão: adição, subtração, multiplicação. Destacar as idéias subtrativas e comparativas da subtração:

Idéia subtrativa		*Idéia comparativa*	
$\begin{array}{r} 58 \\ -24 \\ \hline 34 \end{array}$	$(8 - 4 = 4)$ $(5 - 2 = 3)$	$\begin{array}{r} 58 \\ -24 \\ \hline 34 \end{array}$	(4 para 8 faltam 4) (2 para 5 faltam 3)

5. Revisão: valor absoluto $\times$ valor relativo. Utilizando o cavalu, estabelecer comparações, mostrando a correspondência entre o "valor marcado e o real" (2 vale 200 etc.).

6. Multiplicação por 10. Propor exercícios do tipo: 2×10, 3×10, 4×10, que induzem à colocação de um zero no resultado: $3 \times 10 = 30$, são 3 dezenas.

7. Soma com centenas sem reserva. Criar situações-problemas. Por exemplo:

— Quantas dezenas há em 34 + 23? E em 27 + 35?

Fazer exercícios.

8. Soma com reserva:

$$\begin{array}{rl} 53 = & 50 + 3 \\ \underline{+28} = & \underline{20 + 8} \\ & \underline{70 + 11} \\ & 70 + 10 + 1 = 80 + 1 = 81 \end{array}$$

Na resolução de problemas e exercícios, utilizar o quebra-cabeça aritmético. Cada aluno, ou grupo de alunos, recebe seu jogo para montar.

9. Diferença com centenas, sem reserva. Elaborar problemas e exercícios. (Algumas sugestões podem ser encontradas no capítulo 3, cavalu, item 12.)

10. Diferença com reserva. Também nesse caso, trabalhar com o cavalu, propondo problemas e exercícios.

11. Multiplicação. Se o cavalu tem três pregas, só serve para multiplicar até 3. Então, com o cavalu, fazer:

$2 \times 31 \rightarrow$ 

$$\begin{array}{rr} 31 = & 30 + 1 \\ \underline{\times 2} & \underline{\times 2} \\ & 60 + 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 31 \\ \underline{\times 2} \\ 62 \end{array}$$

Sem cavalu: 4×173

$$\begin{array}{rr} 173 = & 100 + 70 + 3 \\ \underline{\times 4} & \underline{\times 4} \\ & 400 + 280 + 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 173 \\ \underline{\times 4} \\ 692 \end{array}$$

Problemas:

- Decompor um número em produto de dois outros.
- Montar esquemas como produto cartesiano: roupas, caminhões, casas, ruas e esquinas, tabuleiros, cercas e pregos, quadro de varetas etc.

12. Dobro e triplo, metade e um terço. Fazer exercícios, como os da atividade 22, da 1.ª série.

13. Propriedade comutativa da multiplicação. Dar exemplos concretos e, depois, matemáticos.

14. Tabuada do 6, 7, 8 e 9. Propor exercícios e problemas para o aluno treinar as tabuadas. Não mandar decorar.

15. Divisão: processo subtrativo. Observar a seguinte seqüência de atividades para a divisão:

a) Concretamente — Um aluno distribui quinze tampinhas por três colegas, como quiser, de uma em uma, de duas em duas etc. No fim, perguntar a esse aluno:

— Quantas tampinhas você possuía?

— Quantas tampinhas ganhou cada colega seu?

— São três colegas, cada um com cinco tampinhas; qual o total de tampinhas?

Repetir a atividade trocando os alunos e a quantidade de tampinhas. Depois de algumas vezes, utilizar simultaneamente o cavalu. O que estiver sendo feito com as tampinhas é repetido com as fichas no cavalu.

b) Concretamente — Mesma atividade, porém, agora, com resto não nulo: 77 por 3, 29 por 4 etc. Perguntas:

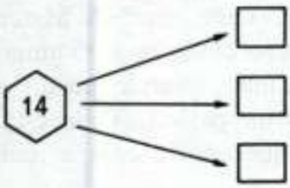
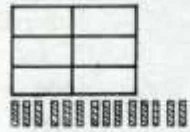
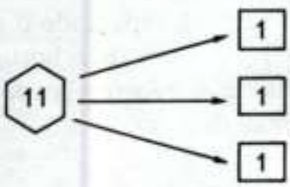
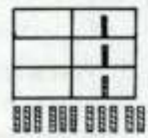
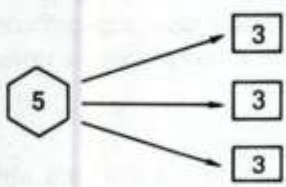
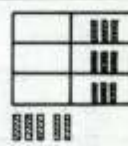
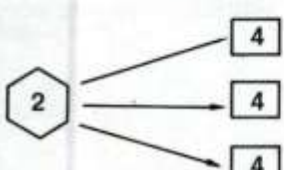
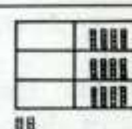
— Quantas eram as tampinhas?

— Quantas ganhou cada um?

— Quantas sobraram?

Não há interesse em fazer no cavalu, separando o resto.

c) Associação com o abstrato — Um aluno divide catorze tampinhas por três. Passo a passo, repetir, na lousa e com números, o que aconteceu na realidade (um aluno pode também repetir no cavalu). Assim:

O fato concreto	A representação na lousa feita pelo professor
	$\begin{array}{rl} 14 & \underline{\lvert\ 3\ } \end{array}$  Quantas são? Vão ser divididas por quantos colegas?
Se o aluno distribuir de uma em uma: 	$\begin{array}{rl} 14 & \underline{\lvert\ 3\ } \\ -\underline{3} & 1 \\ 11 & \end{array}$  Quantas eram? Quantas você deu para cada um? Quantas sobraram com você?
Se o aluno, em seguida, distribuir de duas em duas: 	$\begin{array}{rl} 14 & \underline{\lvert\ 3\ } \\ -\underline{3} & 1 \\ 11 & 2+ \\ -\underline{6} & \\ 5 & \end{array}$  Repetir as perguntas.
Se o aluno, depois, distribuir de uma em uma: 	$\begin{array}{rl} 14 & \underline{\lvert\ 3\ } \\ -\underline{3} & 1 \\ 11 & 2+ \\ -\underline{6} & \underline{1} \\ 5 & 4 \\ -\underline{3} & \\ 2 & \end{array}$  Repetir as perguntas.

Repetir várias vezes. É uma atividade muito rica, uma oportunidade de participação. O aluno poderia querer parar quando estava com cinco tampinhas. Tudo bem! O professor também pára, de modo que a Matemática corresponda à realidade. O resto fica maior que o divisor. Tudo bem! A Matemática pode descrever também uma situação como essa. O aluno pode querer distribuir de quatro em quatro quando possui apenas onze; ele mesmo verificará que é impossível. Tudo está certo e a Matemática acompanhará o que ocorre com a realidade.

Repetir: $30 \div 4$, $17 \div 2$ etc.

d) Associação com o abstrato — Nessa atividade tudo ocorrerá como na anterior, mas agora é o aluno quem vai escrever no lugar do professor. Fazer um risco vertical, separando o número das tampinhas do número de colegas, e um risco horizontal, embaixo do qual ficarão as quantias que irão recebendo, bem como a soma delas. Fazer perguntas do tipo:

— Quantas tampinhas recebeu cada um?

Nesse momento, os alunos vão verificar que faltam tampinhas. Por exemplo, $30 \div 4$; eles dividem e concluem que cada aluno recebeu sete tampinhas. Ora, quatro alunos, cada um com sete tampinhas, são 28 tampinhas. Onde estão as outras duas? É o resto. Logo, $4 \times 7 + 2 = 30$.

e) Abstratamente — Por fim, os alunos fazem divisões abstratamente em seus cadernos: $237 \div 7$, $352 \div 13$, $83 \div 12$, $472 \div 25$ etc. Sempre pelo mesmo processo: o *método subtrativo*.

Pronto! Está feita a divisão e com quaisquer números. Com a prática, os alunos vão evoluindo sozinhos, simplificando, até chegarem ao algoritmo da divisão longa:

$$\begin{array}{r|l} 27 & 4 \\ \cline{2-2} -24 & 6 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

Aqui termina a divisão na 2.ª série. Se o aluno souber a tabuada do 1, já pode dividir ou resolver problemas com quaisquer números.

$$\begin{array}{r|l} 38 & 12 \\ \cline{2-2} \underline{-12} & 1 \\ 26 & 1+ \\ \underline{-12} & \underline{1} \\ 14 & 3 \\ \underline{-12} & \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 857 & 7 \\ \cline{2-2} \underline{-700} & 100 \\ 157 & \;\;10+ \\ \underline{-70} & \;\;10 \\ 87 & \;\;\;\;\underline{2} \\ \underline{-70} & 122 \\ 17 & \\ \underline{-14} & \\ 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 548 & 23 \\ \cline{2-2} \underline{-230} & 10 \\ 318 & 10+ \\ \underline{-230} & \;\;\underline{3} \\ 88 & 23 \\ \underline{-69} & \\ 19 & \end{array}$$

Utilizando esse método, o aluno vai, aos poucos e de acordo com sua individualidade, fazendo simplificações, sem ficar no uso puro e simples da memória. Outra vantagem do método é treinar e motivar a tabuada da multiplicação, que simplifica a divisão (por isso, multiplicação e divisão devem ser estudadas juntas, podendo iniciar-se o estudo com a divisão). Na 3.ª série, o aluno chegará ao algoritmo final. Por enquanto, "faz de qualquer jeito, depois junta tudo". É importante falar das duas idéias da divisão:

- *Repartir* — Tenho doze balas para dividir por três crianças. Quantas dou para cada uma?
- *Medir* — Quantas vezes o três cabe no doze?

16. Fazer contas. Inventar problemas interessantes envolvendo as quatro operações. Cálculo do desconhecido: $\square \times 3 = 21$. Utilizar o quebra-cabeça aritmético.

17. Par ou ímpar com números até 1 000. Fazer exercícios, como na atividade 21 da 1.ª série.

18. Frações. Refazer a atividade 22 da 1.ª série no que julgar necessário. Introduzir a palavra *quarto* como metade da metade. Associá-la com o dobro do dobro, que é quatro vezes.

Através de problemas e exercícios concretos, fazer o aluno descobrir que $2 < 4$, porém $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$.

Introduzir a expressão *um terço*, o numeral $\frac{1}{3}$, falando também em *triplo*. Não insistir, não exigir muito; são apenas atividades preparatórias. O assunto é delicado e abstrato. Ninguém compra um terço de dúzia de ovos. Além disso, as crianças desta idade ainda não compreendem, por exemplo, que metades de conjuntos distintos são diferentes: metade de vinte é diferente de metade de dezoito; são metades, mas são diferentes. Exemplos:

- Uma dúzia de tampinhas: dar metade para um aluno.

  — Quem ficou com mais?

- Outra dúzia de tampinhas: formar as metades das metades e dar $\frac{1}{4}$ mais $\frac{1}{4}$ para outro aluno.

  — Quem ganha mais?

  Dar $\frac{1}{2}$ para um aluno e $\frac{1}{3}$ para outro e descobrir que $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$.

- Mostrar metade de um terço, um terço da metade.

- Descobrir que $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$.

Conforme o nível dos alunos, pode-se falar em $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{6}$ como contrários de cinco vezes (quíntuplos) e seis vezes (sêxtuplos). Problemas como $\frac{1}{6}$ de dúzia comparado com $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$ de dúzia etc.

Muitos alunos já possuem noção de conservação da área e da massa. Começar com situações-problemas envolvendo essas noções. Em seguida, dividir tiras e figuras de papel simulando bolos e chocolates. Para dividir um bolo em terços, os alunos costumam retirar três partes, deixando um resto e, muitas vezes, as partes não são iguais. Somente com cerca de 12 anos, começam a tornar mais exatas essas noções.

Se a Geometria concreta estiver sendo usada, já terá surgido a necessidade de representar os milímetros, pois nem sempre as medidas dão centímetros exatos. Combinar o seguinte: se, por exemplo, o resultado for 13 centímetros e 8 milímetros, dizer: "As medidas deram 13 centímetros e mais 8 risquinhos" (milímetros). Vamos escrever o 13 e o 8 separados por vírgula, para não ficar 138. Assim: 13,8. A vírgula separa o número de centímetros do número de milímetros.

Para calcular um perímetro, é preciso adicionar as medidas dos lados. Num quadrado, mede-se um lado e multiplica-se por quatro para calcular o perímetro. Ao contrário, conhecendo o perímetro do quadrado, divide-se por quatro para calcular o comprimento do lado. Assim, nem a adição nem a subtração oferecem dificuldade. Também a multiplicação por inteiros ou a divisão por inteiros são simples.

Outra prática com números decimais que os alunos algumas vezes trazem para a escola são os centavos. Fazer exercícios com problemas.

SUGESTÕES DE ATIVIDADES PARA A 3.ª SÉRIE

Na 3.ª série, continuar com muitas e variadas atividades envolvendo as quatro operações. As situações criadas devem ser ricas, envolvendo números, atividades gráficas, material concreto, jogos etc.

As novidades, em relação à 1.ª e 2.ª séries, estão no fato de que os algoritmos das quatro operações poderão ficar prontos. Os conceitos serão aprofundados, e a multiplicação lógica (usada desde a 1.ª série) fica incorporada. Será aprofundado o trabalho com frações.

1. Números naturais: número × numeral. Trabalhar com notação decimal, valor absoluto × valor relativo, par ou ímpar, ordenação.

2. As quatro operações. Dar definições e as propriedades comutativa, distributiva e os elementos neutros. Ensinar a prova real. Propor exercícios envolvendo as propriedades das quatro operações.

3. Multiplicação com dois algarismos:

- $2 \times 10 = 10 + 10$: são duas dezenas. $2 \times 10 = 20$: é só colocar um zero no 2.

- $7 \times 10 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10$: são sete dezenas.

  $7 \times 10 = 70$: é só colocar um zero no 7.

- $31 \times 10 = 310$: é só colocar um zero no 31 (são 31 dezenas).

Para multiplicar um número por 10, basta colocar um zero à direita do numeral decimal; para multiplicar por 100, colocam-se dois zeros; para efetuar a multiplicação por 1 000, colocam-se três zeros. Propor contas desse tipo na disposição vertical.

— Treze dúzias de ovos, quantos ovos são? — Desafiar o aluno (esse tipo de pergunta já poderia ser feito no item 2). — Treze dúzias são dez dúzias mais três dúzias. São:

$10 \times 12 + 3 \times 12 = 120 + 36 = 156.$

Ou:

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 13 \\ \hline ? \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 \\ \times 10 \\ \hline 120 \end{array} + \begin{array}{r} 12 \\ \times 3 \\ \hline 36 \end{array} = 156$$

10 dúzias 3 dúzias

Ou ainda:

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 13 \\ \hline 3 \times 12 = \ \ 36 \\ 10 \times 12 = \underline{120} + \\ 156 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 12 & \\ \times \underline{13} & \\ 36 & \leftarrow \ \ 3 \text{ dúzias} \\ \underline{120} & \leftarrow 10 \text{ dúzias} \\ 156 & \end{array}$$

Repetir com outros números, 24 dúzias, por exemplo. Em seguida, com números que não são dúzias:

$$\begin{array}{rl} 32 & \\ \times \underline{14} & \\ 128 & \leftarrow \ \ 4 \text{ vezes o } 32 \\ \underline{320} & \leftarrow 10 \text{ vezes o } 32 \\ 448 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 26 & \\ \times \underline{42} & \\ 52 & \leftarrow 2 \text{ vezes o } 26 \\ \underline{104\ \ } & \leftarrow 4 \text{ vezes o } 26 \text{ (sem o zero,} \\ 1\,092 & \quad \text{mas deixando seu lugar,} \\ & \quad \text{pois são 40 vezes e não 4)} \end{array}$$

Fazer muitos exercícios de fixação.

4. Divisão com dois algarismos. Retomar o item 15 da 2.ª série. Fazer exercícios de revisão pelo método longo, que os alunos sabem utilizar.

Nesse ponto, é necessário um pequeno "empurrão" do professor para que o aluno faça a subtração de cabeça, passando do método longo para o breve. Alguma dificuldade aparece ainda para se chegar ao algoritmo final, porém, de qualquer modo, já temos um método seguro e simples. Vamos estudar um exemplo que mostra várias etapas da evolução do aluno. Acompanhe!

Dividir 262 por 7. Queremos que o aluno chegue a fazer assim:

$$\begin{array}{r|l} 2\,6'2' & \ 7 \\ \cline{2-2} 5\,2 & 37 \\ 3 & \end{array}$$

Mas é importante que o aluno alcance esse ponto sem traumas. Claro, o método utilizado tradicionalmente é o de decorar vários passos sem saber por quê. Isso poderia ser feito aqui, agora que o aluno está seguro e já domina uma técnica, pois o algoritmo facilita muito.

No entanto, se possível, deve-se seguir um caminho misto de lógica e memória, oferecendo ao aluno a oportunidade de dosar as duas coisas, de acordo com sua individualidade; tal dosagem se altera conforme seu amadurecimento. Não exigir uma lógica impecável, impossível nesta idade. Não fazer decorar! Vejamos:

a) Dentro do processo de abreviação, o aluno quer começar dividindo logo as centenas:

$$\begin{array}{rl} 26'2 & \underline{|\;7\;} \end{array}$$

Não podemos dividir 2 centenas por 7; por isso, dividimos 26 dezenas por 7.

b)
$$\begin{array}{rl} 26'2 & \underline{|\;7\;} \\ \underline{-21} & \;\;3 \\ 241 & \end{array}$$

26 dividido por 7 são 3, e 3 vezes 7 são 21. Isso está certo e, se for continuado, conduz ao resultado. Porém, não serve como caminho para o algoritmo. Para o algoritmo, devemos raciocinar que 26 dezenas divididas por 7 dão 3 dezenas, isto é, 30.

c)
$$\begin{array}{rl} 26'2 & \underline{|\;7\;} \\ \underline{-210} & \;\;30 \\ 5\,2 & \;\underline{+7} \\ -\;\underline{4\,9} & \;\;37 \\ 3 & \end{array}$$

Agora sim! 3 dezenas vezes 7 são 21 dezenas ou 210; para 262 faltam 52. Continuando normalmente, encontraremos 7. Está pronta a divisão.
Tirar a prova: $7 \times 37 + 3 = 262$.

- Sem escrever o zero do 210:

$$\begin{array}{rl} 26'2 & \underline{|\;7\;} \\ \underline{-21\;} & \;\;30 \\ 52 & \;\underline{+7} \\ \underline{-49} & \;\;37 \\ 3 & \end{array}$$

- Sem escrever o zero do 30, pois $30 + 7 = 37$ (falar em abaixar o 2):

$$\begin{array}{rl} 26'2' & \underline{|\;7\;} \\ \underline{-21\;\;\;} & \;\;37 \\ 5\,2 & \\ \underline{-4\,9} & \\ 3 & \end{array}$$

- Fazendo as subtrações de cabeça (método breve):

$$\begin{array}{rl} 26'2' & \underline{|\;7\;} \\ 5\,2 & \;\;37 \\ 3 & \end{array}$$

- Quando chegamos a esse ponto, podemos fazer algumas divisões, falando em voz alta para fixar o algoritmo (não é preciso insistir, é só fazer de vez em quando):

26'2 5	$\underline{\lfloor 7\;}$ 3	26 dividido por 7, 3. 3 vezes 7, 21; para 26, 5.
26'2' 5 2 3	$\underline{\lfloor 7\;}$ 37	Abaixa o 2. 52 dividido por 7, 7. 7 vezes 7, 49; para 52, 3.

Outro exemplo:

49'4' 03 4 1 1	$\underline{\lfloor 23\;}$ 21	49 por 23, 2. 2 vezes 3, 6; para 9, 3; 2 vezes 2, 4; para 4, zero. Abaixa o 4. 34 por 23, 1. Uma vez 3, 3; para 4, 1; uma vez 2, 2; para 3, 1.

Está pronto o algoritmo da divisão com dois algarismos. Fica faltando apenas uma generalização. Notar que o algoritmo surgiu assim mesmo na história da Matemática. É o resultado de simplificação.

5. Frações. Trabalhar com material concreto, colorir figuras etc. Falar sobre a notação $\frac{a}{b}$, numerador e denominador. Começar com numerador igual a 1 e depois, por adição, formar outros numeradores: um terço mais um terço são dois terços etc.

6. Exercícios:

a) Dada a fração em algarismos, escrevê-la por extenso.

b) Dada a fração por extenso, escrevê-la em algarismos.

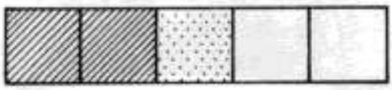
c) Dado o desenho, escrever a fração.

d) Dada a fração, colorir o desenho.

7. Frações de mesmo denominador:

a) Ordem: $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ etc. Fazer desenhos.

b) Adição: $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$. Fazer problemas e exercícios.



c) Subtração: $\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$. Propor problemas e exercícios. Fazer muitas atividades. Criar situações para a descoberta: $\frac{1}{3}$ de dúzia, $\frac{1}{4}$ de 20 etc.

d) Multiplicação por número natural: $3 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ etc.

e) Divisão por número natural. Tenho $\frac{6}{8}$ de um bolo para dividir por dois meninos. Quanto dou para cada um? $\frac{6}{8} \div 2 = \frac{3}{8}$. Seis oitavos dividido por dois dá três oitavos para cada um.

8. *Frações equivalentes.* Começar com desenhos para mostrar que:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \ldots$$

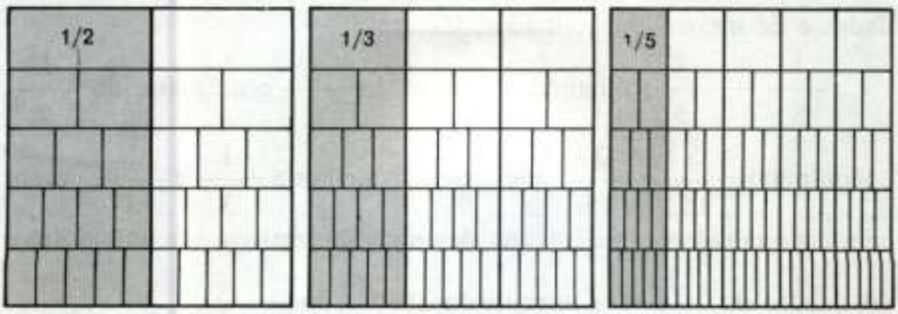
Formar as famílias, as classes:

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \frac{8}{16}, \frac{9}{18}, \ldots\right\},$$

$$\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}, \frac{7}{21}, \frac{8}{24}, \ldots\right\},$$

$$\left\{\frac{1}{5}, \frac{2}{10}, \frac{3}{15}, \frac{4}{20}, \frac{5}{25}, \frac{6}{30}, \frac{7}{35}, \frac{8}{40}, \ldots\right\} \text{ etc.}$$

Fazer quadro das classes:



Aos poucos, de acordo com as necessidades, ir estudando esses quadros. No quadro da classe do $\frac{1}{2}$, vemos na primeira linha dois retângulos; na segunda, quatro; na terceira, seis; isto é, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ..., se o quadro fosse maior. Esses números são os múltiplos de 2 e mostram que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$, metade de cada linha.

No quadro do $\frac{1}{3}$ temos: 3, 6, 9, 12, 15, ..., que são os múltiplos de 3, mostrando que $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \ldots$, um terço de cada linha.

Como 6 é múltiplo comum, então está nos dois quadros, isto é, os dois quadros possuem linhas iguais que são a terceira do quadro do $\frac{1}{2}$ e a segunda do quadro do $\frac{1}{3}$; portanto, usando essas duas linhas, trocamos $\frac{1}{2}$ por $\frac{3}{6}$ e $\frac{1}{3}$ por $\frac{2}{6}$, que são frações de denominadores comuns. Se os quadros fossem maiores, encontraríamos outras linhas iguais, como a de doze partes.

9. Soma e subtração de frações. Começar com numerador 1. Escolher, nas classes do item anterior, duas frações equivalentes às dadas e de mesmo denominador. Exemplo:

$\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$; olhando na classe do $\frac{1}{3}$ e na classe do $\frac{1}{5}$, encontramos $\frac{5}{15}$ e $\frac{3}{15}$, que são equivalentes a $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$, porém com denominadores iguais (fazer desenhos ilustrativos; ver última linha do quadro do $\frac{1}{3}$ e a terceira do quadro do $\frac{1}{5}$).

Daí: $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5}{15} + \frac{3}{15} = \frac{8}{15}$.

Fazer muitos exercícios. Induzir o aluno a encontrar frações equivalentes sem olhar as classes, mas multiplicando o numerador e o denominador pelo mesmo número, por tentativas, até conseguir igualar os denominadores.

Exemplo: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$1 \times 2 = 2$
$2 \times 2 = 4$

$1 \times 2 = 2$
$3 \times 2 = 6$

$1 \times 3 = 3$
$2 \times 3 = 6$

$1 \times 3 = 3$
$3 \times 3 = 9$

Pronto. Já encontramos duas frações com o mesmo denominador: $\frac{2}{6}$ e $\frac{3}{6}$. Então:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

Fazer o mesmo com numeradores diferentes de 1.

10. Multiplicação. $5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$. Fazer vários exercícios.

11. Divisão. $\frac{9}{11} \div 3 = \frac{3}{11}$. Propor também um bom número de exercícios. Usar quebra-cabeça aritmético.

12. Ordem. Determinar qual é maior: $\frac{2}{3}$ ou $\frac{1}{2}$? Primeiro, fazendo desenhos e colorindo. Segundo, procurando nas classes duas frações de mesmo denominador, porém equivalentes às duas frações dadas. Terceiro, multiplicando "em cima e embaixo" pelo mesmo número até igualar os denominadores. Exemplo:

$\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$ são iguais a $\frac{4}{6}$ e $\frac{3}{6}$; como $\frac{4}{6} > \frac{3}{6}$, então $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$.

13. Frações decimais (com denominador 10, 100, . . .). Proceder como nas outras frações, só que, neste caso, é mais fácil, pois os numeradores são múltiplos uns dos outros.

14. Números decimais. Se a Geometria concreta está sendo aplicada, os números decimais já vêm sendo utilizados, na prática, desde a 2.ª série, inclusive como operações. Também existe a prática com centavos. Fazer adições e subtrações no cavalu. Multiplicação e divisão só por números inteiros. Propor problemas e exercícios.

15. Unidades de medida: tempo, comprimento, área. Aprofundar os conceitos. Ler as horas e os minutos.

SUGESTÕES DE ATIVIDADES PARA A 4.ª SÉRIE

1. Números naturais. Dar o sistema de numeração decimal.

2. Operações com números naturais, propriedades, expressões numéricas. Propor exercícios variados.

3. Múltiplos de um número. Trabalhar a partir de situações motivadoras: um vendedor viajava pela redondeza e demorava quatro dias para voltar para casa. Se saiu de viagem pela primeira vez no dia 4, quais os dias que passará em casa? Outras situações que podem ser exploradas:

- Remédio que deve ser tomado de cinco em cinco horas, começando à zero hora.

- Sapo que vai pulando 60 centímetros.

Usar a notação M(3) para múltiplos de 3, logo:

$M(3) = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \ldots\}$.

Fazer o jogo de contar de três em três. Quem errar sai do jogo. De quatro em quatro e assim por diante. Construir um *crivo*. A partir do zero, pule dois números e risque um, isto é, riscar 0, 3, 6, etc. Idem para M(2), M(5) etc.

~~0~~	1	2	~~3~~	4	5	~~6~~	7	8	~~9~~
10	11	~~12~~	13	14	~~15~~	16	17	~~18~~	19
20	~~21~~	22	23	~~24~~	25	26	~~27~~	28	29
~~30~~	31	32	~~33~~	34	35	~~36~~	37	38	~~39~~
40	41	~~42~~	43	44	~~45~~	46	47	~~48~~	49

Mostrar que, por exemplo, $M(6) \subset M(3)$. Calcular $M(3) \cap M(4)$ etc.

4. Divisores de um número. Dividir o 12 pelos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 (um de cada vez). Quais deram resto zero? $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Exercícios: D(18), D(7), D(14) etc.

Mostrar que os divisores desses números aparecem em quantidades pares:

$$D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\};\ D(7) = \{1, 7\};\ D(14) = \{1, 2, 7, 14\}.$$

Quando os divisores de um número aparecem em quantidades ímpares, esse número é quadrado perfeito. Exemplo:

$$D(16) = \{1, 2, 4, 8, 16\}.$$

5. Número primo. Encontrar D(7), D(5), D(2). Sete, cinco e dois são *números primos*, ou seja, são divisíveis apenas pela unidade e por eles mesmos. Para determinar os números primos, usar o *crivo de Eratóstenes* *. Para isso, pode-se utilizar o quadro de pinos: começar colocando os pinos nos múltiplos de 2; depois, nos de 3; em seguida, nos de 5, nos de 7 e assim por diante. São primos os números que sobrarem sem pinos, exceto o 1, pois, por convenção, o 1 não é primo nem composto.

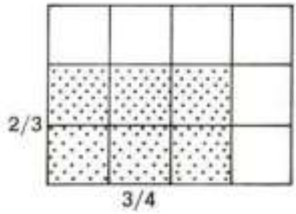
* Eratóstenes (276-196 a.C.) — Astrônomo grego, foi um dos primeiros a medir o tamanho da Terra. Foi diretor da biblioteca do Museu de Alexandria. O crivo que leva seu nome serve para determinar os números primos.

6. Frações. Retomar os itens de 5 a 14 da 3.ª série. Aprofundar o estudo das frações: frações próprias e impróprias, número misto, frações equivalentes, simplificação de frações, redução ao mesmo denominador. Nesta altura, o estudo já começa a ficar um pouco formal. Ainda não se fazem demonstrações, mas o aluno já aceita exemplos numéricos, gráficos e outros.

7. Operações com frações:

a) *Adição e subtração* — Continuar com tentativas para encontrar um denominador comum. O produto dos denominadores sempre serve. Descobrir que o menor múltiplo comum dá um resultado mais simples. Começar a falar em menor múltiplo comum ou, como é mais conhecido, *mínimo múltiplo comum* dos denominadores (mmc).

b) *Multiplicação* — $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{6}{12}$: multiplicar os numeradores e os denominadores. Os alunos acham isso muito natural. Depois de alguns exercícios, formar uma justificativa.



O esquema acima é muito útil. A base foi dividida em quatro partes, e o lado em três; logo, são $3 \times 4 = 12$ quadradinhos. Se a base foi dividida em quatro partes, cada parte é $\dfrac{1}{4}$ e foram tomados $\dfrac{3}{4}$. No lado, foram tomados $\dfrac{2}{3}$, portanto, $2 \times 3 = 6$ quadradinhos, que é a metade de 12, isto é, $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$, representado pela parte reticulada. Lembre-se que $\dfrac{3}{4}$ significa: 3 pedaços de $\dfrac{1}{4}$.

c) *Divisão por número natural* — Pode ser feita por dois métodos diferentes:

- *Método franco* — Dividir o numerador pelo divisor:

$$\frac{6}{7} \div 3 = \frac{6 \div 3}{7} = \frac{2}{7}$$

Seis pedaços para dividir por três meninos são dois pedaços para cada menino. Seis sétimos para dividir por três meninos são dois sétimos para cada menino.

- *Método da inflação* — Multiplicar o denominador pelo divisor (ao invés de dividir em cima, multiplicar embaixo):

$$\frac{6}{7} \div 3 = \frac{6}{7 \times 3} = \frac{6}{21} \text{ (que é igual a } \frac{2}{7}\text{)}$$

Na hora de dividir, cada um ganha seis pedaços, só que menores do que os pedaços do caso anterior. Eram seis sétimos e ganharam seis vinte e um avos (cada um continua ganhando a mesma quantidade, só que valendo menos). O método franco diminui a quantidade mas mantém a qualidade. O método da inflação mantém a quantidade mas diminui a qualidade.

O método da inflação é sempre possível de aplicar. Veja:

$$\frac{5}{9} \div 2 = \frac{5}{18}$$

Mostrar que, dividindo-se quinze balas por uma criança, dará quinze para ela: $a \div 1 = a$. Mostrar que, dividindo-se zero balas por sete crianças, dará zero para cada uma: $0 \div a = 0$.

d) *Divisão por frações* — Inverter e multiplicar:

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$$

Eles aceitam bem. Aliás, na divisão por número natural, já invertiam no método da inflação:

$$\frac{5}{9} \div 2 = \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$$

Dar problemas e exercícios variados.

Justificar a regra de divisão de frações pode ser muito importante, pois envolve dois conceitos extremamente construtivos. O primeiro deles é o fenômeno intuitivo de que dividir por muitos dá pouco para cada um. Se vou dividir um bolo, quanto menos gente, maior o pedaço; quanto mais gente, menor o pedaço. Se vou dividir balas, quanto menos gente, maior a quantidade de balas; quanto mais gente, menor a quantidade. Exemplo: doze balas.

12 ÷	12	6	4	3	2	1	número de pessoas
	1	2	3	4	6	12	quantidade de balas

Explorar esse fato e, em seguida, dar exercícios como o seguinte, para mostrar que quanto menor o monte, maior a quantidade de montes:

o o o o o o o o o o o o	Dividir doze bolos em montes de quatro bolos. Quantos montes?	$12 \div 4 = 3$ montes
o o o o o o o o o o o o	Dividir doze bolos em montes de dois bolos. Quantos montes?	$12 \div 2 = 6$ montes
o o o o o o o o o o o o	Dividir doze bolos em montes de um bolo. Quantos montes?	$12 \div 1 = 12$ montes
o o o o o o o o o o o o	Dividir doze bolos em montes de meio bolo. Quantos montes?	$12 \div \frac{1}{2} = 24$ montes

Escrever o quadro:

12 ÷	4	2	1	$^1/_2$	$^1/_4$	tamanho do monte
	3	6	12	24		quantidade de montes

Pode-se concluir que, se o monte é a metade do anterior, a quantidade de montes é o dobro. Escrever: $12 \div \frac{1}{2} = 12 \times 2 = 24$. Comparar com o quadro.

Outro fenômeno importante da divisão é o de que, na hora de dividir as balas, se chegar mais gente, deve-se aumentar a quantidade de balas para que cada um continue recebendo o mesmo. Dobrando o número de pessoas, deve-se dobrar o número de balas: $12 \div 4 = 3$ e $24 \div 8 = 3$, isto é, $\frac{12}{4} = \frac{24}{8} = 3$.

Multiplicando o dividendo e o divisor pelo mesmo número, o quociente fica o mesmo, pois chegou mais gente, mas também mais balas.

Vamos usar este fato: $a \div b = 2a \div 2b = 3a \div 3b$:

$$12 \div \frac{1}{2} = (12 \times 2) \div (\frac{1}{2} \times 2) = 24 \div 1 = 24$$

$$12 \div \frac{1}{3} = (12 \times 3) \div (\frac{1}{3} \times 3) = (12 \times 3) \div 1 = 12 \times 3,$$

isto é, $12 \div \frac{1}{3} = 12 \times 3$ (dividir por $\frac{1}{3}$ é multiplicar por 3).

8. Porcentagem: iniciação preparatória para as séries seguintes. Dar apenas isto: $8\% = \frac{8}{100}$, $27\% = \frac{27}{100}$.

Explicar que porcentagem é fração de denominador 100. Trabalhar normalmente. Daí, dar algum significado social: porcentagem de aprovação, Imposto de Renda, Fundo de Garantia etc.

9. Números decimais. Transformar frações decimais em números decimais e vice-versa:

$$2{,}57 = 2 + \frac{5}{10} + \frac{7}{100} = \frac{200 + 50 + 7}{100} = \frac{257}{100}$$

Basta escrever o número, sem vírgula, no numerador e o 1 seguido de tantos zeros quantos forem os algarismos depois da vírgula, no denominador. Cada dezena vale dez unidades, cada unidade vale dez décimos, cada décimo vale dez centésimos etc. Ver capítulo 3, cavalu, item 27.

Transformar frações em números decimais:

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0{,}6 \text{ ou } \begin{array}{r|l} 30 & 5 \\ \hline 0 & 0{,}6 \end{array}$$

Dar as quatro operações na forma de números decimais. Para justificar cada regra, transformar em frações decimais, efetuar e voltar:

$$0{,}6 + 0{,}3 = 0{,}9, \text{ pois } 0{,}6 + 0{,}3 = \frac{6}{10} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10} = 0{,}9.$$

Tudo isso vem sendo feito desde a 2.ª série, se a Geometria concreta estiver sendo aplicada. De qualquer forma, o aluno já deve trazer alguma experiência com números decimais (pelo menos medidas de comprimento e os centavos).

10. Cálculo do desconhecido: $\square + 3 = 5$. Esse tipo de exercício deve ser feito desde a 2.ª série, mas concretamente, já que as regras algébricas são do estágio das operações abstratas. A Álgebra é uma estrutura abstrata. Porém, se pudermos concretizar, a ação levará à operação concreta, isto é, o pensamento operando com objetos concretos. Oportunamente, o aluno fará a abstração. Como vimos no capítulo 3, essa ação concreta pode ser feita com uma balança, a partir da 4.ª ou 5.ª séries.

11. Unidades de medidas. Apesar de o aluno ainda não possuir a noção de conservação do volume, já se podem fazer as experiências desse tipo. As idéias começam a se fixar. Fazer problemas envolvendo tempo, moeda, perímetro, área, peso etc. Continuar a atividade 15 da 3.ª série.

Geometria concreta

Capítulo 5

INTRODUÇÃO

Esta Geometria vem sendo testada há muitos anos, em muitas escolas. Trata-se apenas de atividades que envolvem o manejo de régua, esquadro, compasso e transferidor.

O primeiro cuidado do professor deve ser o de não se preocupar em passar informações aos alunos. Pelo contrário: ele é que vai descobri-las, da maneira mais lúdica e mais gostosa possível, a seu modo, em seu ritmo.

A hora da Geometria vai funcionar como uma quebra no ritmo normal da aula. Vai ser a hora de desenhar, de usar lápis coloridos, de deixar a cabeça trabalhar com gosto. Não para devolver na prova. A avaliação consiste apenas em verificar se a atividade foi feita ou não. E não é o caso de obrigar o aluno a fazer, mas sim de incentivá-lo a isso, reforçando, elogiando seu desempenho. É importante, ainda, estimular a comunicação entre os alunos.

A freqüência das aulas de Geometria vai ser opção do professor: um pouquinho por dia, todos os dias, ou um tempo maior, mas só uma vez por semana. É pouca coisa para se fazer em cada ano.

Sempre que possível, o aluno deve fazer a atividade primeiro e, depois, o professor faz na lousa, para que o aluno possa se avaliar.

Para fazer um desenho como este ✡, as instruções neste livro são: primeiro fazer três pontos . ˙ ., depois ligá-los △ (fechar a cerquinha), em seguida fazer mais três pontos △ e, por fim, ligá-los ✡. Essas instruções vêm acompanhadas de quadrinhos como os seguintes  , mostrando a seqüência de atividades. Na lousa, entretanto, estes desenhos serão superpostos, ficando somente o último.

Muitas figuras, como as acima, também são estudadas em Educação Artística, porém com objetivos diferentes. Enquanto a Geometria está interessada em *propriedades geométricas* (relações métricas, tangência, posições relativas), as Artes estão interessadas em *estética* (equilíbrio, movimento, ritmo, harmonia). Teremos, então, diferenças entre o lógico e o artístico, e todo aluno deve desenvolver-se em ambas as direções, mantendo a integração.

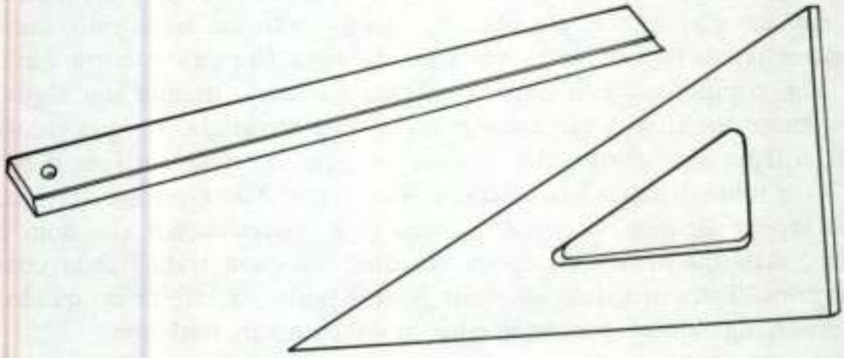
É importante que os alunos vejam sua geometria aplicada às necessidades sociais. Assim, depois de estudar retas perpendiculares, pode-se visitar uma construção e observar um pedreiro usando o fio de prumo para verificar se a parede está realmente vertical. O pedreiro usa linhas, esquadro, nível, fio de prumo e poderia explicar muita coisa aos alunos. Nas marcenarias e serralherias também se utiliza Geometria e uma visita seria útil, apesar do perigo das máquinas. Observar um alfaiate ou uma costureira usando suas réguas e medidas, ou um vendedor de panos utilizando o metro é outra possibilidade interessante.

A Geometria concreta das quatro primeiras séries, época em que o aluno está entrando no estágio das operações concretas, corresponde à "Geometria" do período Neolítico até o Egito antigo. São receitas descobertas por tentativas e erros, num processo embriológico. A partir da 5.ª série, começará o trabalho metodológico de classificar e ordenar conhecimentos, chegando às demonstrações (7.ª e 8.ª séries), como fez Euclides na Grécia antiga, com base nos conhecimentos egípcios e de outros povos. É a construção do grande edifício lógico a partir de postulados, resultado de uma prática feita na época certa. Começa, então, a Geometria racional.

Portanto, da 1.ª à 4.ª série não se ensina conteúdo geométrico, apenas atividades. É proibido explicar! O conteúdo será descoberto a partir das atividades, mas não é este o objetivo principal. O objetivo é a ação! A partir da ação serão atingidos objetivos cognitivos, afetivos e psicomotores.

ATIVIDADES PARA A 1.ª SÉRIE

Na 1.ª série o aluno manipulará *régua* e *esquadro* para desenvolver habilidades e formar conceitos.



Material necessário

a) Aluno:

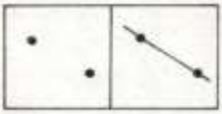
- lápis grafite ou de cor;
- caderno de desenho (50 páginas);
- régua (um pequeno sarrafo sem graduação, só para riscar);
- esquadro.

b) Professor:

- régua de madeira (1 metro);
- esquadro de madeira (de preferência artesanal, sem graduação, só para riscar).

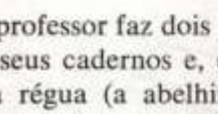
Propostas de atividades

1. É a etapa do jogo livre. O aluno faz riscos livremente, usando lápis e régua. Pode também fazer riscos com a mão livre, mas a atividade é com régua. Riscar o que quiser, enchendo uma ou duas páginas.

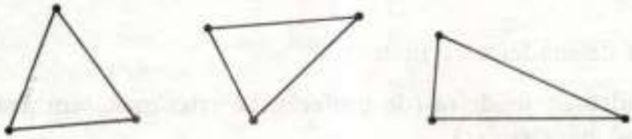
2. 

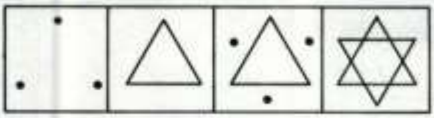
O professor faz dois pontos na lousa. Os alunos devem fazer o mesmo em seus cadernos e, em seguida, ligá-los com um traço reto, utilizando a régua (a abelhinha vai voar de uma flor até a outra etc.). Por fim, o professor também faz o traço na lousa, usando sua régua. No começo, os alunos não conseguem fazer a atividade: a régua escorrega, o lápis não acompanha a régua — pega no dedo ou fura o papel —, a folha debaixo fica marcada. Tudo bem! Não é preciso corrigir. É só repetir algumas vezes. A firmeza (e a conceituação) virá com o treino, mais ou menos na época em que estiverem trabalhando com triângulos. Toda atividade de ligar pontos pode ser refeita no quadro de pinos, ligando-se concretamente pinos com um barbante.

Verificar, com a régua, se a mesa e outras superfícies são planas.

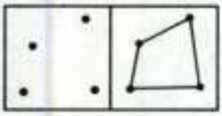
3. 

O professor faz três pontos. Os alunos fazem o mesmo e, usando a régua, ligam os pontos, formando o triângulo (fechar a cerquinha). Por último, o professor também une os pontos. Não dar nomes. Repetir a atividade várias vezes, com os pontos em diversas posições. Colorir. Trabalhar algumas vezes à mão livre, sempre partindo dos pontos. Fazer desenhos livres e composições com triângulos.



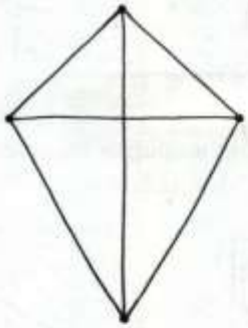
4. 

O professor faz três pontos. Os alunos fazem o mesmo e, com o auxílio da régua, unem os pontos. O professor também liga esses pontos e faz mais três. Os alunos fazem os três pontos e os ligam. O professor também. Colorir. Repetir à mão livre. Os alunos se ajudam.

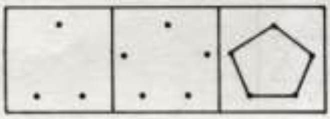
5. 

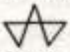
O professor faz quatro pontos. Os alunos fazem o mesmo e unem os pontos, construindo a cerca. Repetir com variadas formas de quadriláteros. Não dar nomes. Colorir. Propor o jogo de descobrir quadriláteros na sala (coisas de quatro lados: janela, quadro, ladrilho, caderno. . .).

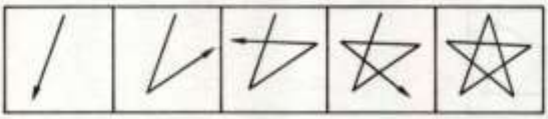
6. Desenho de um papagaio. O professor faz quatro pontos, os alunos o imitam e ligam os pontos. O professor diz que estão faltando as varetas. Os alunos fazem as diagonais. O professor repete na lousa. Fazer à mão livre. Colorir. Se os alunos quiserem, desenhar o rabo do papagaio.



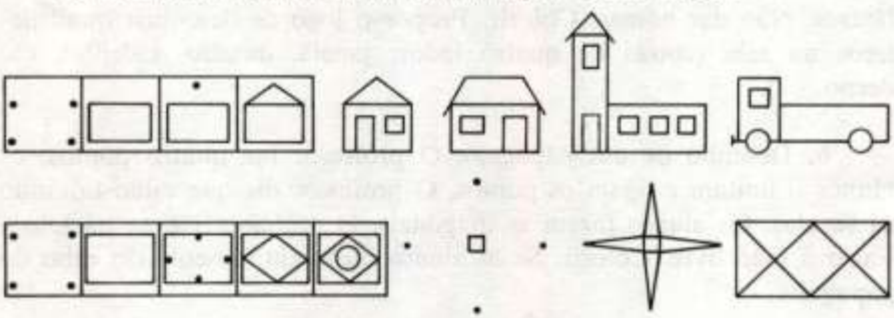
Se o professor perguntar quantos triângulos há neste papagaio, o aluno responderá quatro. Mas na realidade são oito. Um deles é a metade de cima. Evidentemente, essa pergunta só pode ser feita se eles já contam até oito.

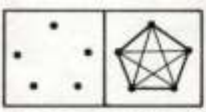
7. 

O professor faz três pontos. Os alunos repetem, sem uni-los. O professor faz, então, mais dois pontos. Os alunos repetem e fecham a cerca. O professor também. Colorir. Repetir. Há muitas variações:  , , (pulando um ponto). Propor o jogo de fazer estrela à mão livre, de uma vez, sem pontos:

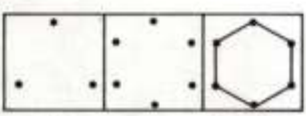


8. Atividades para serem feitas sempre com a régua:



9. 

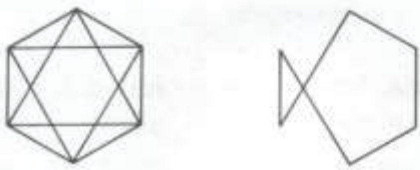
Unir cinco pontos de todas as maneiras possíveis. Colorir a estrela. Repetir. Fazer à mão livre. São dez riscos.

10. 

Fazer três pontos, depois mais três e em seguida uni-los. Vai formar-se uma figura de seis lados. Chamar a atenção do aluno para a semelhança com a casinha da abelha (mostrar gravura de colméia). Mostrar ladrilhos e coisas hexagonais (sextavadas). Pedir que tragam de casa objetos sextavados (parafuso, lápis etc.).

11. O hexágono e suas diagonais (não citar nomes). Traçar todas as nove:

Deixar apenas com seis:

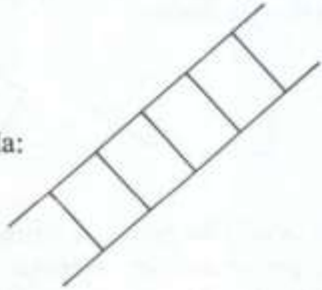


12. Tentar o tracejado, sem forçar: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

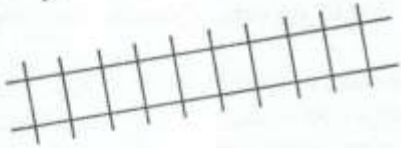
13.

O professor decidirá se deve ou não fazer essa atividade, pois talvez os alunos estejam aprendendo a escrever com letra cursiva.

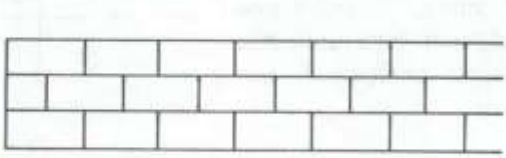
14. Escada:



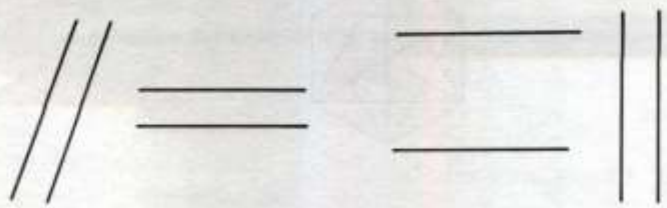
Trilho:



Muro:



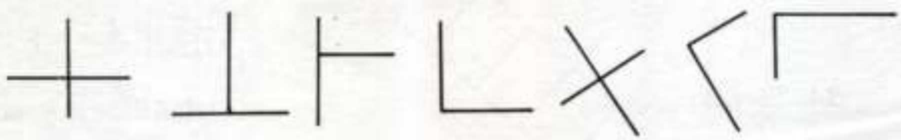
15. Fazer uma reta ao lado da outra. Esse comando é entendido como *paralelas*. Fazer em várias posições. Não é para ficar perfeito.



16. Riscar uma reta, fazer um ponto fora dela e traçar uma reta ao lado, passando pelo ponto.

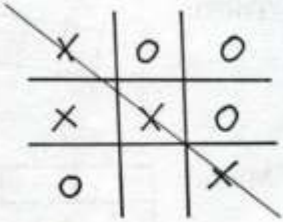
Repetir várias vezes, para que o aluno possa intuir o postulado de Euclides: "Só passa uma paralela pelo ponto".

17. Traçar duas retas, uma deitada e outra em pé, cruzando-se. Repetir esse traçado em várias posições. Não é para ficar perfeito. (Noção de perpendicularismo, sem esquadro.)

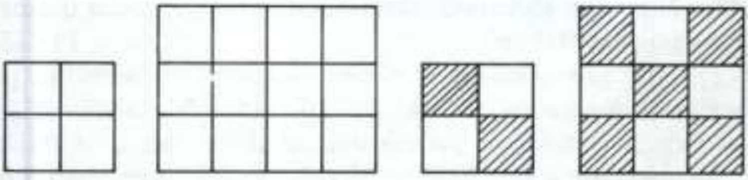


Uma reta e um ponto fora dela. Um pingo de chuva caindo. Passar pelo ponto uma reta perpendicular. Repetir a construção, , só que com o ponto na reta. Colocar um poste no ponto.

18. Jogo-da-velha. É um jogo para duas pessoas. Começa com o desenho à mão livre. Um menino coloca um ×, outro coloca um ○ e assim por diante, até que alguém faça uma fila de três, em qualquer posição. É um jogo de esperteza.



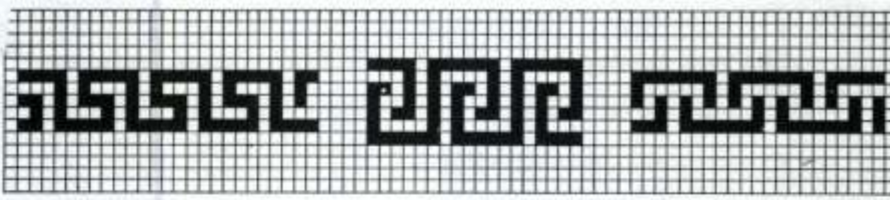
19. Tabuleiros quadriculados:



Contar intersecções (pontos de cruzamento de linhas). Contar quadradinhos (cruzamento de faixas). Essa atividade é importante para a multiplicação e para a conceituação de área.

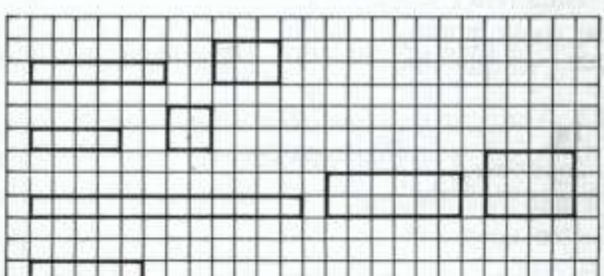
Fazer trançados com tiras de papel ou outro material.

Usando papel quadriculado, traçar *gregas* como as da figura. Essa atividade pode ser feita integradamente com a aula de Artes.

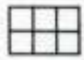


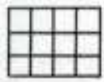
20. À mão livre, no papel quadriculado, formar tabuleiros (fôrmas de gelo, grades etc.).

- 6 casas:
- 4 casas:
- 12 casas:
- 5 casas:



Descobrir que todo número tem pelo menos um tabuleiro em tira. Com o 5, porém, só se pode formar uma tira. Descobrir outros números que só possuem tabuleiros em tiras únicas (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23...), que são os *números primos*. Descobrir números que podem dar tabuleiros quadrados (1, 4, 9, 16, 25...), *números quadrados*. Descobrir números que podem dar tabuleiros em tiras duplas (2, 4, 6...), *números pares*. Esse jogo pode ser feito também no quadro de pinos ou com tampinhas. É um jogo muito interessante e importante na conceituação de multiplicação e na descoberta de várias relações na estrutura dos números. Esse tipo de atividade facilita muito trabalhos posteriores, como mmc etc. O aluno precisa ter alcançado a noção de conservação do número, pois vai haver alterações na posição dos quadradinhos.

21. Divisão. $6 \div 2 = 3$, pois $3 + 3 = 6$. Logo: 

$12 \div 3 = 4$, pois $4 + 4 + 4 = 12$. Logo:  Fazer perguntas como:

— Quantos quadradinhos há em cada tira?

— Quantas são as tiras?

— Qual o total de quadradinhos?

— Agora, conte um a um para conferir.

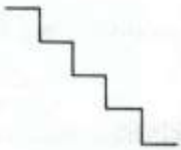
Insistir nesse tipo de problema, pois é útil na multiplicação e na conceituação de áreas.

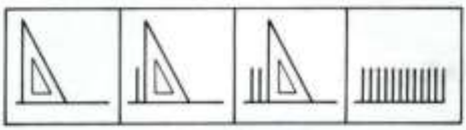
22. Uso livre do esquadro. Desenhar o que quiser.

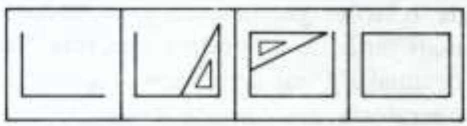
23. Verificar o esquadrejamento da carteira, do caderno, da parede, do papel quadriculado etc.

24. Ensinar desenhos, utilizando o esquadro:

• perpendicular:  (cruzando ou não)

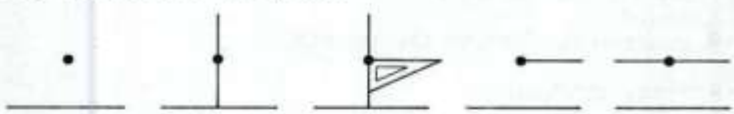
• escada: 

• pente: 

• retângulos e quadrados: 

25. Perpendicular por um ponto:

26. Paralela por um ponto:



Repetir a atividade. Depois, marcar um ponto na reta de "baixo" e traçar, por esse ponto, uma reta paralela à de "cima".

É claro que coincidirão: *propriedade reflexiva.* Mostrar também que duas retas, paralelas a uma terceira, são paralelas entre si: *propriedade transitiva.*

27. Simetrias:

a) Pingar tinta em um papel e dobrá-lo para obter uma figura simétrica. A atividade também pode ser feita sem tinta. Basta dobrar o papel e recortar irregularmente. Fazer borboletas desse modo.

b) Dobrar um papel várias vezes e recortar uma figura; depois de desdobrado, formará uma fila.

c) Citar coisas simétricas como orelhas, olhos, chifres etc.

ATIVIDADES PARA A 2.ª SÉRIE

Na 2.ª série, o aluno manipulará a *régua graduada*. Vai treinar tomar medidas de comprimento, descobrindo a partir daí uma série de relações geométricas e aritméticas, que poderão ser demonstradas mais tarde. É da prática concreta que surgirá a necessidade das frações decimais. Com sete anos o aluno já atinge a noção de conservação operatória dos comprimentos.

Material necessário

a) Aluno:

- lápis grafite ou de cor;
- caderno de desenho (50 páginas);
- régua graduada;
- esquadro.

b) Professor:

- régua de madeira graduada (1 metro);
- esquadro de madeira.

Propostas de atividades

1. Medir comprimentos de objetos, como: cadernos, livros, carteiras, lápis, estojos. Medir com palmos, dedos, palitos, centímetros. Fazer perguntas como:

— Quantos centímetros tem um palmo?

— Quantos palmos mediu a carteira?

— Qual o maior palmo, o meu ou o de vocês?

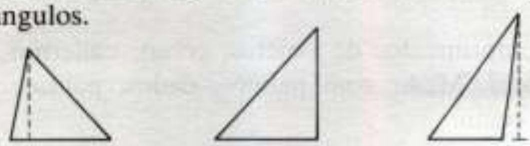
— Com meu palmo a carteira vai medir mais ou menos do que com o de vocês?

Fazer riscos de 8 cm, 11 cm etc.

2. Desenhar, com esquadro e régua, um retângulo qualquer. Será preciso medir os dois lados para que fiquem iguais.

3. Desenhar um quadrado. Medir as diagonais. Qual é maior, o lado ou a diagonal? Aqui já vai fazer falta a notação de números decimais (que também não dariam exato!). Deixar assim mesmo. Pedir que escrevam o número mais próximo. Exemplo: se a medida é 12,3 cm, escrever 12. Eles não aceitam, pois não é 12. Então, escreva: 12 e um pouquinho ou 12 e meio. Também não aceitam muito tempo. Combinar de escrever o 12, em seguida contar os risquinhos (pauzinhos) e escrever depois do 12. Colocar uma vírgula para separar. Eles escrevem 12,3 e ficam muito satisfeitos. Não insistir nisso. Eles conversam entre si e resolvem; o interesse é deles. Mas ocorre um fato interessante: ainda não consideram o problema resolvido. Eles têm as medidas dos quatro lados, porém, na figura, os lados se somam e fecham uma região. Assim, pedem para somar os números. Tudo bem: $12{,}3 + 12{,}3 + 12{,}3 + 12{,}3 = 48{,}12$, pois ficam doze risquinhos. É a hora de ir ao cavalu para transformar dez risquinhos em 1 cm. Mostrar antes na régua. Assim o perímetro fica 49,2. Pronto! Vão trabalhar o ano inteiro com números decimais. Isso facilitará muito o trabalho com frações. Ganha-se muito tempo.

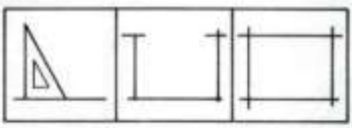
4. Desenhar um triângulo e medir a altura. Repetir com vários tipos de triângulos.



5. Desenhar duas retas paralelas, riscando os dois lados da régua. Medir a distância entre elas (qualquer ponto serve). Medir a distância entre duas linhas do caderno. O objetivo é identificar retas paralelas como sendo retas que não se aproximam nem se afastam.

6. Desenhar um retângulo e medir suas diagonais para descobrir que as duas são iguais (usar a palavra *igual*, ao invés de *congruente*, por ser do vocabulário do aluno).

7. Traçado de paralelas:

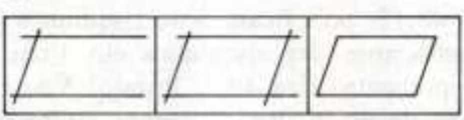


Traçar uma reta e duas perpendiculares. Medir dois segmentos iguais como para construir um retângulo. Traçar a paralela. Medir em outros pontos para verificar se a distância se mantém. Essa eqüidistância é a relação conceitual de retas paralelas, neste momento.

8. Dividir um segmento em duas partes iguais. Basta medir o segmento, dividir a medida por 2 e marcar o ponto médio (construir um segmento de medida divisível por 2, para ficar fácil; pode-se também desafiar o aluno com medidas mais difíceis).

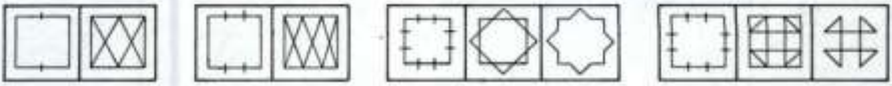
Dividir um segmento em três partes iguais. Depois, em quatro ou cinco, escolhendo sempre medidas divisíveis. Tirar a prova medindo cada parte e multiplicando pela quantidade de partes.

9. Paralelogramo:



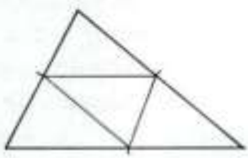
Mostrar que as diagonais se cortam ao meio, medindo cada parte.

10. Fazer desenhos:



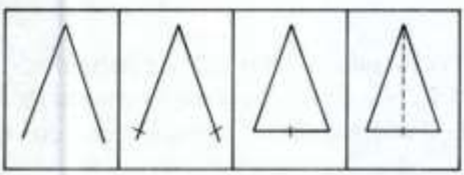
11. Perímetro. Desenhar polígonos, medir os lados e calcular a soma deles (quanto de muro no terreno? quanto de arame?). Perímetro do quadrado (multiplicar o lado por 4). O problema inverso: dar o perímetro do quadrado e pedir o lado (dividir por 4), dando um número divisível por 4.

12. Triângulo. Marcar os pontos médios dos lados. Uni-los, para formar um triângulo pequeno.



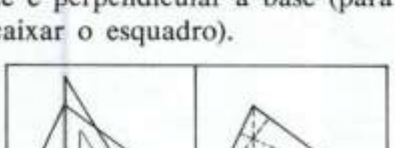
Medir, para descobrir que cada lado desse triângulo é a metade de cada lado correspondente do triângulo maior (lado paralelo).

13.



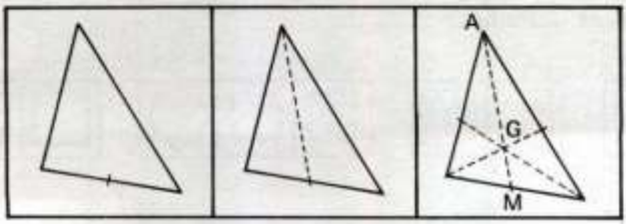
Desenhar um triângulo que tenha dois lados de mesma medida. Ligar o ponto médio da base (lado desigual) com o vértice, para descobrir que é perpendicular à base (para mostrar que é perpendicular, basta encaixar o esquadro).

14.



Traçar as três alturas de um triângulo para descobrir que passam todas por um mesmo ponto.

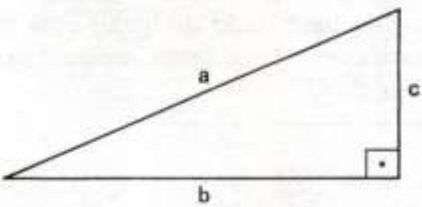
15.



Desenhar um triângulo qualquer. Ligar os pontos médios aos vértices, para descobrir que os três segmentos (medianas) passam pelo mesmo ponto *G*. Medir *AG* e *GM*. Constatar que AG = 2GM. Examinar a mesma relação nos outros dois segmentos. Repetir com outros triângulos.

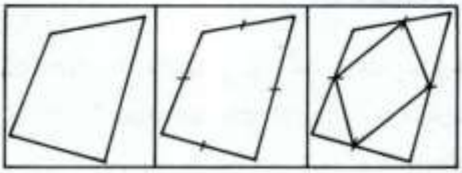
16. Desenhar um triângulo retângulo (usar o esquadro para construir o ângulo reto). Medir os três lados para descobrir qual é o maior deles. Descobrir que o maior lado é menor que a soma dos outros dois. Pedir para construir um triângulo retângulo cujos lados tenham 6, 8 e 10 cm. Mostrar que $10 < 6 + 8$, porém, $10^2 = 6^2 + 8^2$. (O professor precisa conhecer a convenção: $2a = a + a$ e $a^2 = a \cdot a$, isto é, $2 \times 6 = 6 + 6 = 12$ e $6^2 = 6 \times 6 = 36$, mas não há necessidade de discutir isso com o aluno, por enquanto. Basta dizer-lhe que multiplique o número por ele mesmo: $5^2 = 25$; $8^2 = 64$; $1^2 = 1$; $1{,}2^2 = 1{,}44$ etc.)

Repetir a atividade com outros triângulos retângulos: 3, 4 e 5; 5, 12 e 13; 8, 15 e 17; 9, 12 e 15. Este é o famoso *teorema de Pitágoras*: $a^2 = b^2 + c^2$ (o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos).

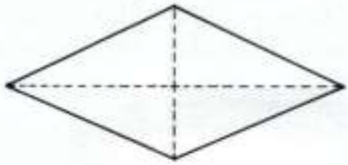


Repetir a atividade mais concretamente. No canto da mesa, medir 9 cm para um lado e 12 cm para o outro. Com isso, obtemos 15, fechando o triângulo. Observar outra vez que $9^2 + 12^2 = 15^2$.

17. Descobrir que os pontos médios de um quadrilátero qualquer determinam outro quadrilátero de lados paralelos (paralelogramo).



18. Desenhar um losango:



Pintar metade de vermelho e metade de azul. Já vai ficando a noção de que o losango (bem como todas as coisas) tem duas metades.

19. Atividades preparatórias para o cálculo de áreas. Os alunos já têm a noção da conservação operatória de superfície, mas a atividade aqui proposta não envolve operações além de contagem. Pode ser feita com material concreto. Usar, por exemplo, a planta de uma casa (pode ser mimeografada, desenhada no quadro ou retroprojetada). Eles contam os quadradinhos e desenham no papel quadriculado; aliás, os próprios alunos podem fazer plantas simples da sala etc.

Para realizar essa atividade o aluno já estará utilizando o conceito de que meio mais meio é igual a um.

Começar falando sobre a planta: vejam a sala; esta porta permite a entrada no quarto; estamos vendo os ladrilhos do chão; vejam o quarto da frente. Perguntar:

— Quantos ladrilhos há no quarto da frente?

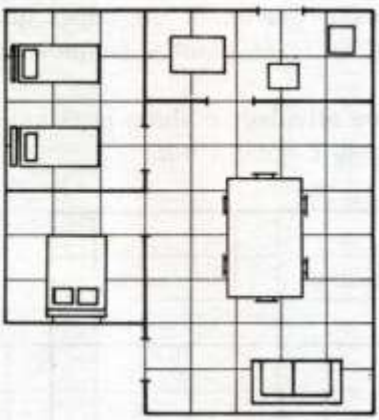
— Quantas são as fileiras de ladrilhos?

— Quantos ladrilhos há em cada fileira?

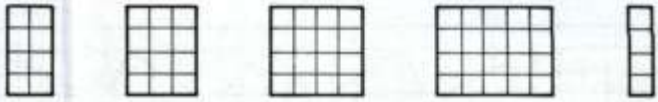
— Quanto é $4 + 4 + 4$ (ou $3 + 3 + 3 + 3$, conforme a fileira)?

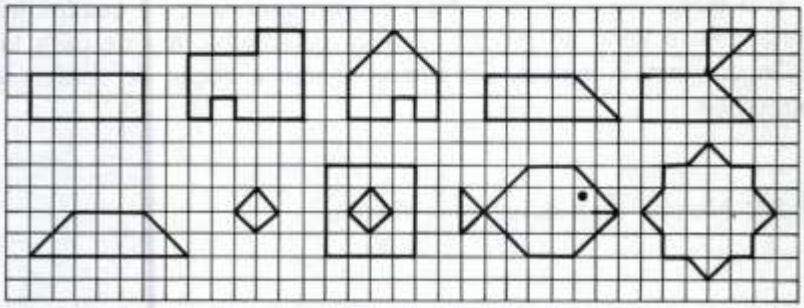
Fazer o mesmo com o quarto dos fundos e com a sala. Não insistir mais. A próxima atividade é mais rica. Verificar se na escola há algum lugar com chão ladrilhado para refazer a experiência.

20. Repetir a atividade anterior, só que, agora, com alguns ladrilhos cobertos por móveis. Isso não impedirá a contagem; mas alguns já poderão fazer o exercício, multiplicando.

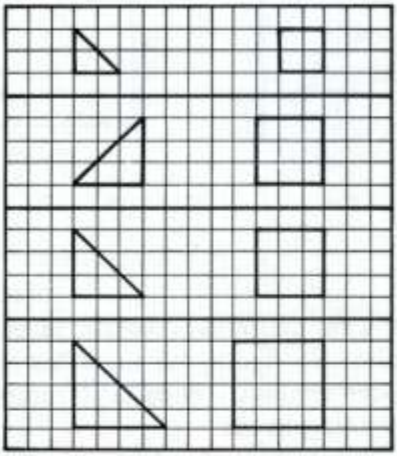


21. Contar os quadradinhos de cada figura:

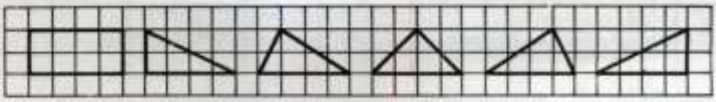




22. Contar os quadradinhos de cada triângulo e do quadrado correspondente:

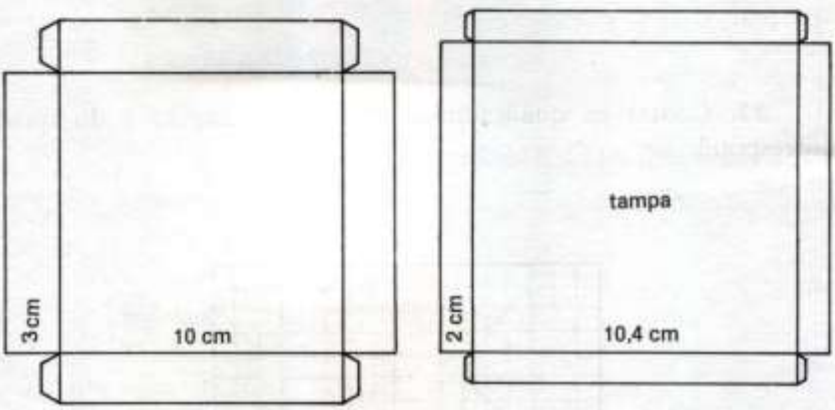


23. Contar os quadradinhos (alguns alunos vão completar o retângulo de cada triângulo para dividir por 2).



É o momento de deixar claro que a quantidade de quadradinhos do retângulo é igual ao produto dos dois números, um de cada lado. O triângulo tem a metade. Os alunos já têm a noção de conservação da superfície.

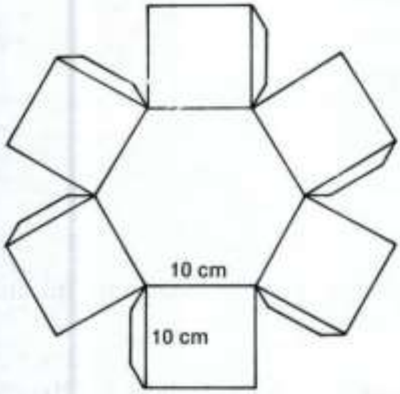
24. Montar uma caixa com tampa:

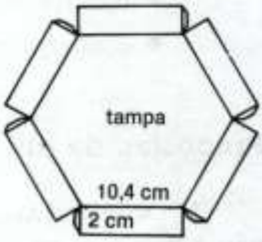


Copiar os desenhos em cartolina, recortar, fazer as dobras e montar. Escolher o tamanho. Na figura, há sugestões; a tampa é ligeiramente maior, para poder encaixar. Pode-se decorar a caixa antes de montá-la: pintar, fazer colagens etc.

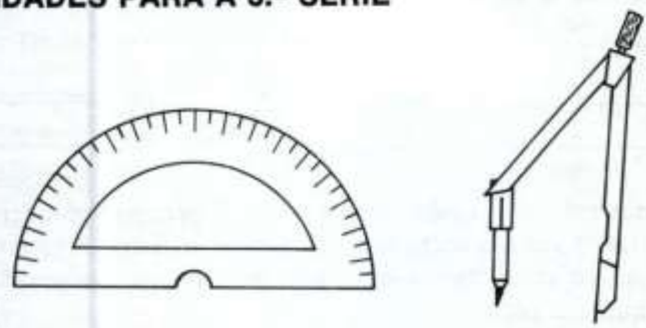
Repetir a atividade.

25. Montar outro tipo de caixa:





ATIVIDADES PARA A 3.ª SÉRIE



Na 3.ª série, o aluno manipulará o *transferidor* e o *compasso*.

Material necessário

a) Aluno:

- lápis grafite ou de cor;
- caderno de desenho (50 páginas);
- régua graduada;
- esquadro;
- transferidor;
- compasso.

b) Professor:

- régua de madeira graduada (1 metro);
- esquadro de madeira;
- transferidor de madeira;
- compasso para giz.

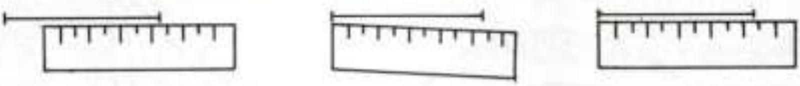
Propostas de atividades

1. Desenho livre com transferidor. Preencher uma ou duas páginas, como o aluno quiser.

2. Desenhar um ângulo com a régua e medi-lo. Repetir umas três vezes, com ângulos de pouca, média e grande abertura. Essa atividade é trabalhosa para o professor. Como proceder? Perguntar:

— Como se mede um segmento com a régua?

— Assim? — Assim? — Assim?

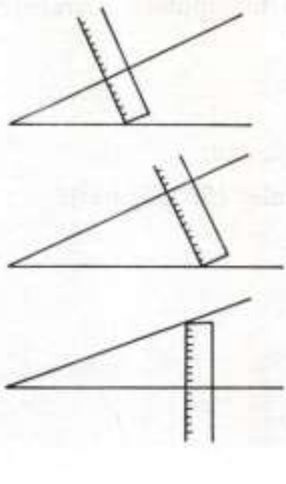


Os alunos ajudam e acaba-se acertando. É preciso aprender como se faz! Acertar o zero e acertar a régua com o risco. Perguntar em seguida o que se deve usar para medir a abertura de um ângulo. Eles dizem que é a régua:

— Assim?

— Assim?

— Assim?



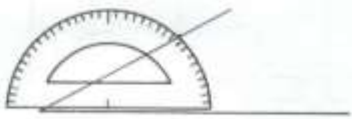
Conforme o lugar onde é colocada a régua, temos uma medida diferente. Por isso, temos de usar o transferidor, que é uma "régua torta" (exibir o transferidor). Procurar o zero do transferidor.

— Onde está o 10?

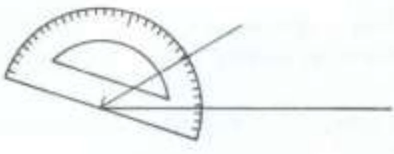
— E o 20?

(Pode ser que o transferidor tenha duas escalas, cada uma começando de um lado.) Agora, desenhar um ângulo na lousa e efetuar a medida, escrevendo-a no ângulo (é um ótimo momento para utilizar um retroprojetor, se disponível, pois assim pode-se usar um transferidor do aluno, que é de plástico transparente. Pedir que façam o mesmo. Eles não conseguem. Ir de carteira em carteira. Na primeira, com o transferidor, mostrar:

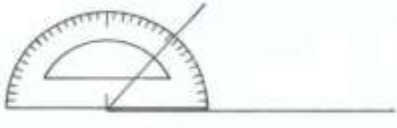
— Assim?



— Assim?



— Assim?



— Veja agora: 10, 20, 30, 40, 45, 48. Pronto, 48 é a medida. Escreva aqui. Agora ensine seu colega.

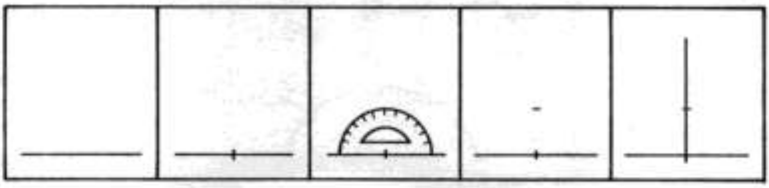
Logo já são quatro ensinando, oito, dezesseis, e toda a classe já sabe.

3. Desenhar duas retas perpendiculares com esquadro e medir os ângulos com transferidor. Relacionar perpendicular com 90º.

4. Medir ângulos de coisas, como: caderno, folha, carteira. No pátio, medir o ângulo entre duas linhas que saem do aluno e passam uma de cada lado do prédio. Quanto mais ele se aproxima do prédio, maior será o ângulo. Fazer o mesmo com outras coisas: duas árvores, altura do prédio etc.

5. Até aqui o problema era medir ângulos. Agora, é o inverso: construir um ângulo a partir de uma medida. Exemplo: 10º, 43º, 57º, 90º, 180º. Outra vez é necessário ensinar de carteira em carteira. Os próprios alunos se ajudam. Falar sobre o "ângulo" de meia-volta, que mede 180º e não é ângulo, é uma reta, dois segmentos opostos.

6. Construir retas perpendiculares, usando o transferidor. Conferir com esquadro. Dar o nome: *perpendicular*.



Medir os dois ângulos, o da direita e o da esquerda. Devem ser iguais, e esta é a relação conceitual de retas perpendiculares.

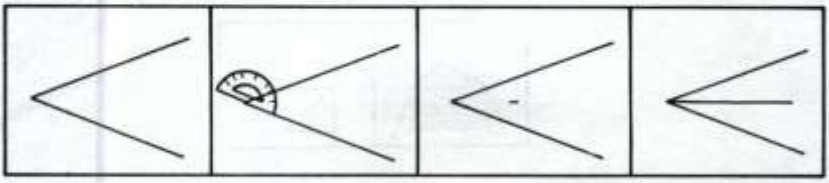
Descobrir retas perpendiculares em uma caixa de sapatos. Depois, na própria sala. Fazer o mesmo com paralelas.

7. Medir ângulos OPV (opostos pelo vértice):

Traçar duas retas que se cruzam e descobrir que os ângulos opostos têm a mesma medida: o da direita com o da esquerda; o de cima com o de baixo. Adicionar as medidas de cima com a da direita (consecutivos) para descobrir que a soma é 180º. Começar a escrever a bolinha acima da medida para indicar que a medida foi feita em graus, como é hábito.

Muitas experiências podem ser feitas com material concreto. Essa atividade, por exemplo, pode ser feita com dois barbantes que se cruzam.

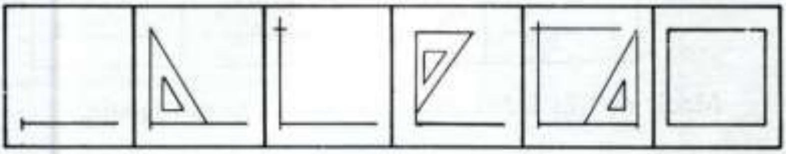
8. Desenhar um ângulo qualquer e dividi-lo ao meio. É preciso medir o ângulo e dividir a medida por dois.



Se o ângulo mede 50º, devemos marcar um ângulo de 25º.

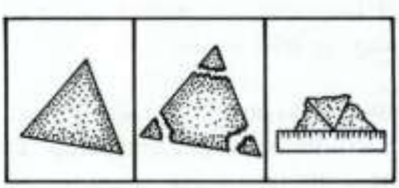
Por último, tomar um ponto qualquer da linha que divide o ângulo (bissetriz) e medir as distâncias dele a cada lado do ângulo. Descobrir que são sempre iguais. Repetir a atividade algumas vezes, inclusive dividir 180º ao meio.

9.

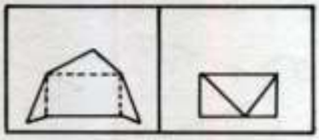


Desenhar um quadrado, usando o esquadro. Medir os ângulos para descobrir que são iguais. Medir os lados para descobrir que também são iguais. Medir as diagonais para descobrir que são iguais. Medir os ângulos de uma diagonal com os lados para descobrir o que é bissetriz.

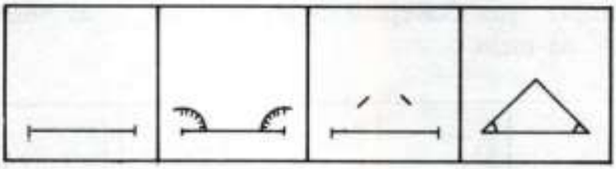
10. Desenhar um triângulo qualquer, medir os três ângulos e adicionar as medidas para verificar que a soma é sempre a mesma: 180º. Repetir várias vezes e em várias ocasiões, com triângulos diferentes, para descobrir a propriedade segundo a qual a soma dos três ângulos de um triângulo qualquer vale sempre 180º.



Outro método: recortar um triângulo de papel, rasgar e separar os três ângulos. Colocar um ao lado do outro para adicionar. Mostrar, com uma régua, que a soma é 180º (ângulo de meia-volta). Pode-se também adicionar os ângulos sem rasgar o papel, fazendo dobras convenientes, obtendo, no fim, um retângulo como um envelope.

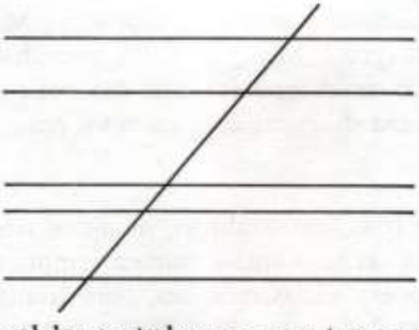


11. Desenhar um triângulo com dois ângulos de 60º na base. Medir o terceiro ângulo para descobrir que também mede 60º, como os outros dois. Claro, a soma deve ser 180º!



Medir os três lados para descobrir que são iguais.

12.

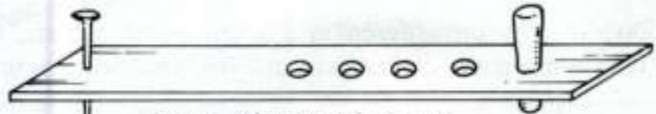


Série de paralelas cortadas por uma transversal. Medir os ângulos correspondentes para descobrir que são iguais. É como se a primeira reta deslizasse, sem balançar, ocupando posições paralelas sucessivas. Por isso é que o ângulo não muda.

13. Dividir um ângulo em duas, três, quatro partes iguais. Deve-se dividir a medida. Escolher medidas divisíveis. Tirar a prova, multiplicando cada parte pelo número total de partes.

14. Traçado de circunferências:

prego, barbante, giz



prego, tábua com furos, giz

A utilização desses métodos artesanais facilita muito a compreensão de propriedades como a da circunferência: todos os pontos são eqüidistantes do centro (prego), e essa distância é o comprimento do barbante (raio). Essa eqüidistância é a relação conceitual de circunferência.

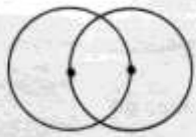
15. Desenhos livres com compasso. O aluno pode preencher muitas páginas, soltando a imaginação. Propor o jogo de encontrar coisas redondas.

16. Tentar o tracejado, sem forçar:

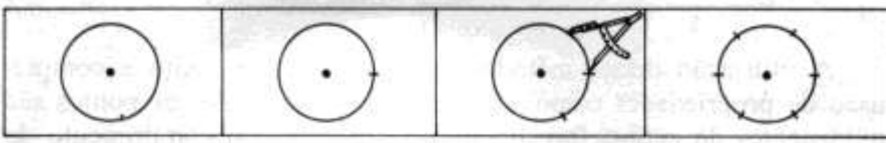
17. Desenhar uma circunferência. Marcar três pontos de qualquer maneira e desenhar o triângulo. Não precisa ser regular. Colorir. Fazer o mesmo com o quadrilátero e outras figuras.

18. Desenhar um diâmetro (corda que passa pelo centro) e medi-lo. Repetir a operação com outros diâmetros. Descobrir que todos os diâmetros de uma mesma circunferência têm a mesma medida, que é o dobro da do raio.

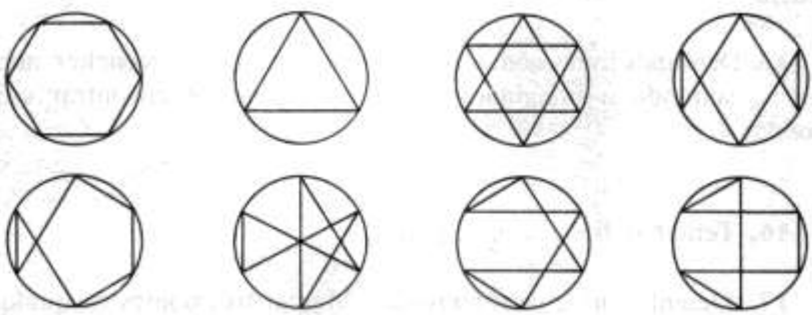
19. Desenhar duas circunferências, uma passando pelo centro da outra.



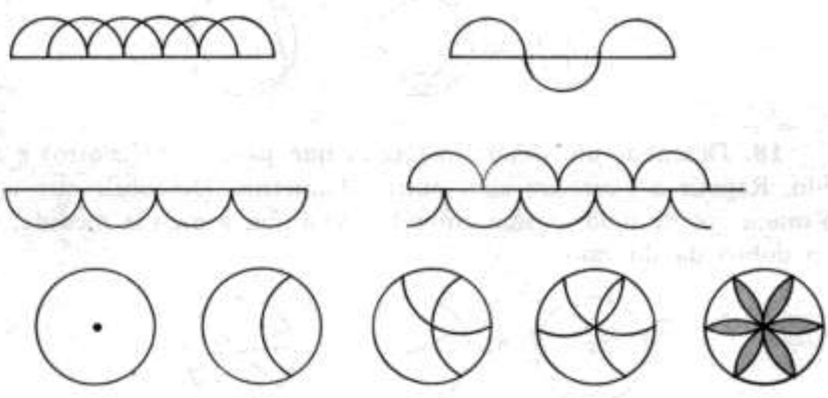
20. Dividir uma circunferência em seis partes iguais, usando o compasso com a mesma abertura com que foi traçada a circunferência.

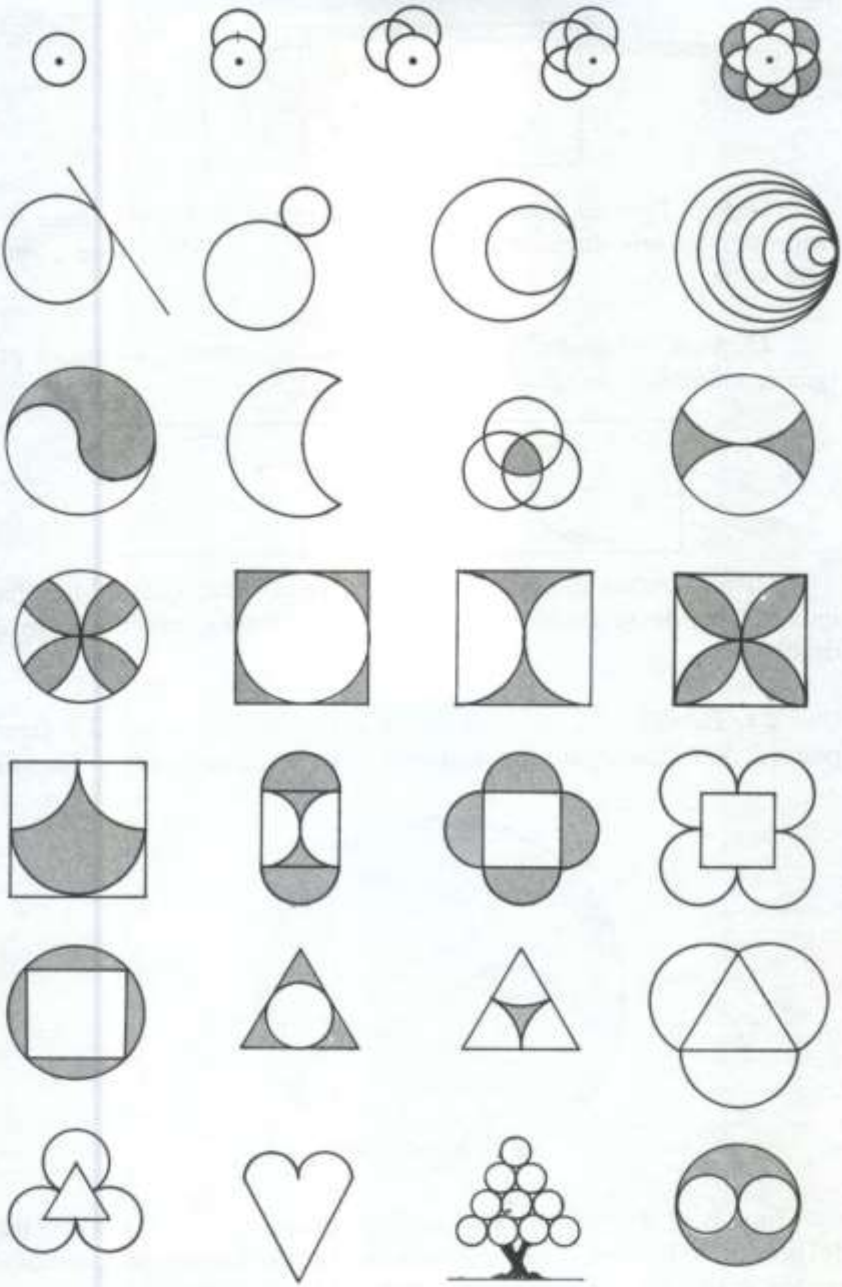


Ligar os seis pontos com a régua. São várias as possibilidades.

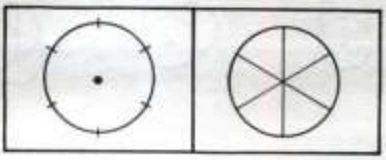


21. Fazer desenhos, usando régua, esquadro e compasso:



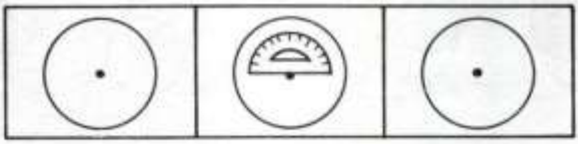


22. Como na atividade 20, dividir uma circunferência em seis partes:



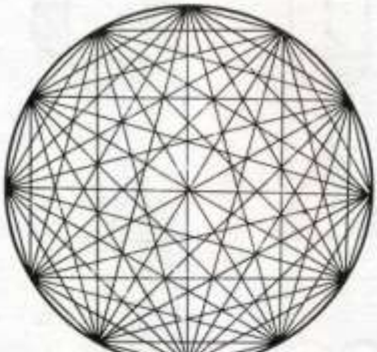
Depois, ligar os pontos ao centro e medir os ângulos para descobrir que são seis ângulos de 60º, num total de 360º, que é igual a uma volta.

23. Com o transferidor, dividir uma circunferência em dez partes iguais, marcando ângulos de 36º, pois 360º ÷ 10 = 36º.



Dividir outras circunferências em cinco, sete, quatro, três partes iguais. Quando se divide em quatro partes iguais, obtém-se um quadrado.

24. Dividir uma circunferência em doze partes iguais e ligar os pontos, de todos os modos possíveis, com a régua (lados e diagonais).

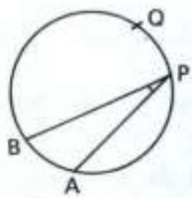


Fica bem decorativo fazer essa atividade (com um número maior de pontos) em uma tábua pintada de preto. Fincar preguinhos nos pontos e ligá-los com linhas coloridas. Há muitas variações.

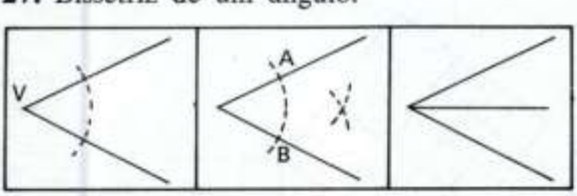
25. Desenhar várias cordas de uma mesma circunferência para descobrir qual é a maior (dar o nome *corda* para qualquer segmento que liga um ponto a outro da circunferência).

Associar corda com arco: arco e flecha de índio.

26. Desenhar uma circunferência e marcar dois pontos *A* e *B*. A partir de um outro ponto *P* qualquer, formar o ângulo e medi-lo. Em seguida, tomar outro ponto *Q* e, do mesmo modo, medir o ângulo. O aluno vai descobrir que os ângulos são iguais, não dependendo da posição de *Q*, desde que este ponto esteja do mesmo lado que *P* em relação a *AB*.

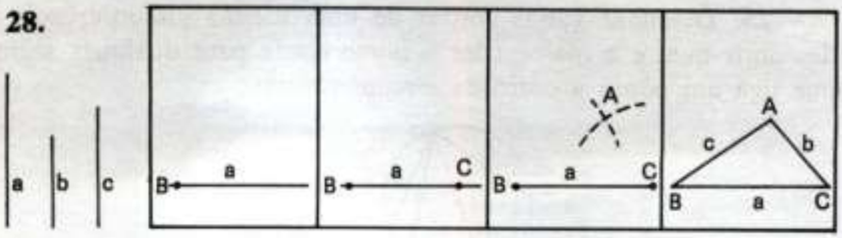


27. Bissetriz de um ângulo.

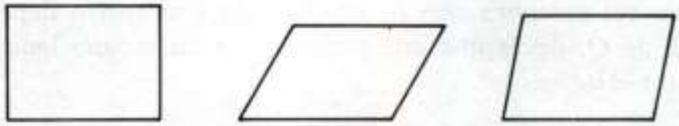


Com centro no vértice *V*, traçar um arco. Com centro em *A* e depois em *B*, traçar dois arcos. Onde se cortarem, tem-se um ponto que, ligado ao vértice, dará a bissetriz. Não citar nomes. Medir os ângulos para descobrir que são iguais. Repetir várias vezes. Fazer a atividade com um ângulo de 180º, para descobrir que a bissetriz é perpendicular à reta.

28.

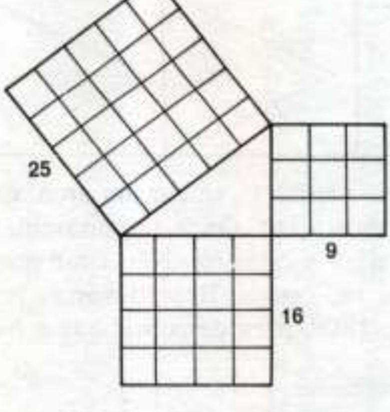


Dar três segmentos para que os alunos desenhem um triângulo com eles. Marcar um ponto *B* sobre uma reta qualquer. Abrir o compasso até ficar igual ao segmento *a* e marcar sobre a reta o ponto *C*. Em seguida, traçar dois arcos: um com centro em *B* e abertura igual ao segmento *c* e o outro com centro em *C* e abertura *b*. Onde os arcos se cruzam, tem-se o terceiro vértice, *A*, do triângulo. Repetir com três segmentos iguais. O aluno vai intuindo que o triângulo é uma figura rígida, não articulada. Dados os três lados, o triângulo está determinado. O mesmo não acontece com polígonos de quatro lados. O quadrilátero pode se deformar em várias posições.



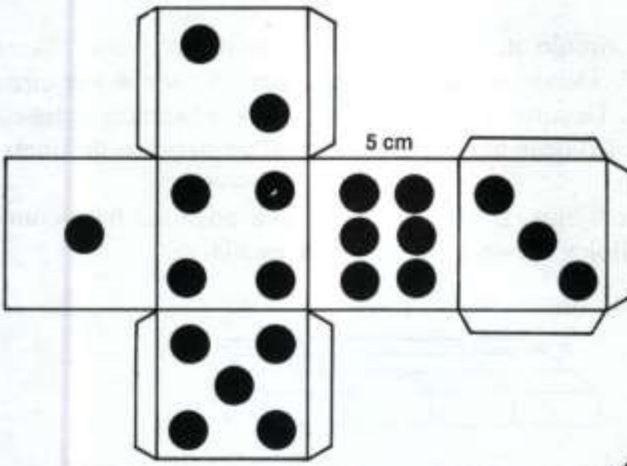
29. Refazer as atividades 19, 20, 21, 22 e 23 da 2.ª série.

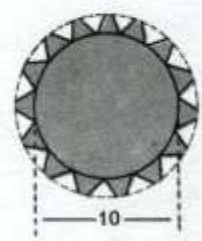
30. Refazer a atividade 16 da 2.ª série. Uma outra maneira de fazê-la é contando "ladrilhos" sobre os quadrados nos lados do triângulo retângulo.



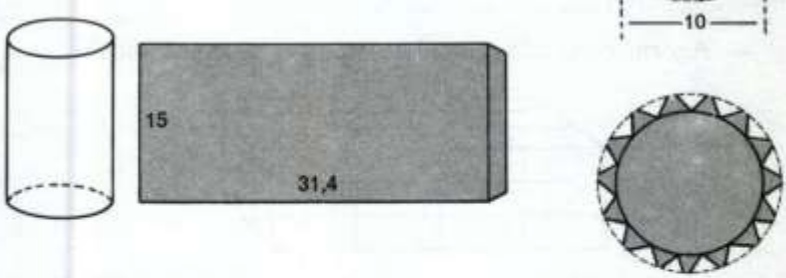
Existe material concreto para essa atividade. São 25 quadradinhos de madeira que podem ser encaixados no quadrado da hipotenusa ou repartidos entre os outros dois. Repetir a atividade com um triângulo de 6 × 8 × 10 centímetros de lados. Reparar que temos procurado trabalhar com números inteiros, mas o teorema vale sempre com qualquer triângulo retângulo. Exemplo: 2, 7; 3, 6 e 4, 5.

31. Montar um dado:



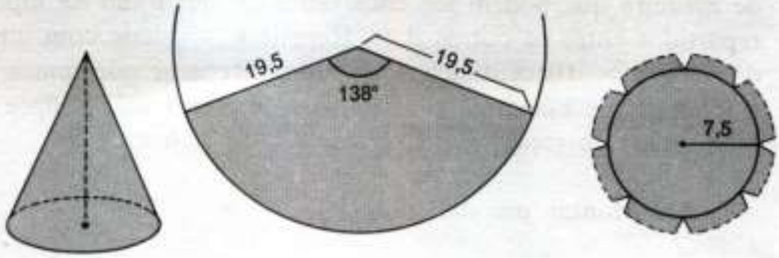


32. Montar um cilindro:



A base do retângulo que vai ser enrolado deve ser 3,14 vezes o diâmetro do círculo da base (no exemplo: 3,14 × 10 = 31,4). (Lembrar que $\pi = 3{,}1415926535\ldots$, mas arredonda-se para 3,14.)

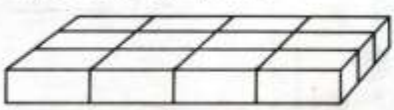
33. Montar um cone:



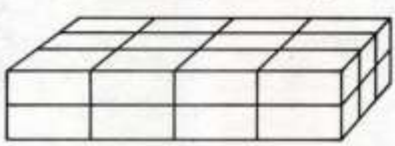
Fazer um círculo de cartolina com raio de 19,5 cm. Marcar um ângulo de 138º. Deixar a beirada para colar. A base é um círculo de 7,5 cm de raio. Decorar antes de colar. Não colocando a base, pode ser um chapéu. Colocar barbante para amarrar debaixo do queixo.

34. Contar tijolos. É uma atividade que pode ser feita com material concreto, tijolos mesmo, no pátio da escola.

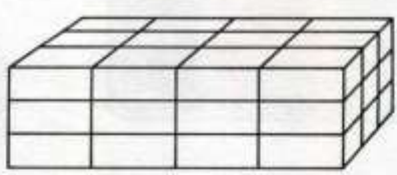
— Quantos tijolos há na pilha?



— E com duas camadas, quantos tijolos há?



— Agora, com três camadas, quantos são os tijolos?



Repetir a atividade com outros números e outros materiais (caixas de sapato, latas de óleo vazias). Nessa fase, o aluno ainda não atingiu a noção de conservação do volume. O assunto deve ser sistematizado a partir dos onze anos.

ATIVIDADES PARA A 4.ª SÉRIE

Material necessário

a) Aluno:

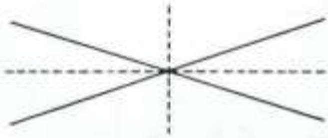
- lápis grafite ou de cor;
- caderno de desenho (50 folhas);
- régua graduada;
- esquadro;
- transferidor;
- compasso.

b) Professor:

- régua de madeira graduada (1 metro);
- esquadro de madeira;
- transferidor de madeira;
- compasso para giz.

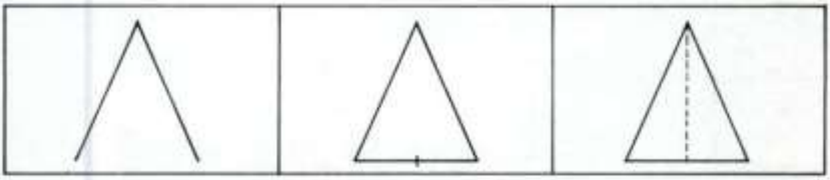
Propostas de atividades

1. Construir duas retas que se cruzam e, em seguida, as duas bissetrizes, medindo com o transferidor.

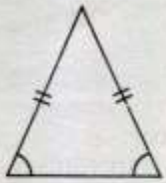


Depois, medir o ângulo entre as duas bissetrizes para descobrir que são perpendiculares, quaisquer que sejam as posições iniciais das duas retas.

2. Desenhar um triângulo com dois lados iguais (isósceles). Marcar o ponto médio da base e ligar ao vértice. Descobrir que essa mediana é, ao mesmo tempo, altura (perpendicular à base) e bissetriz (ângulos iguais).



3. Construir um triângulo com dois lados iguais.

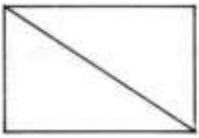


Medir para descobrir que os dois ângulos da base são iguais.

4. Construir um triângulo com dois ângulos iguais. Medir para descobrir que há dois lados iguais.

5. Desenhar um triângulo com três lados desiguais. Medir os ângulos para descobrir que o ângulo maior fica oposto ao maior lado.

6. Descobrir que um triângulo retângulo é a metade de um retângulo. Colorir.

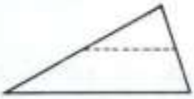


7. Desenhar um quadrilátero de lados opostos paralelos. Traçar as duas diagonais e medir para descobrir que elas se cortam ao meio. Colorir as quatro regiões, usando duas cores.

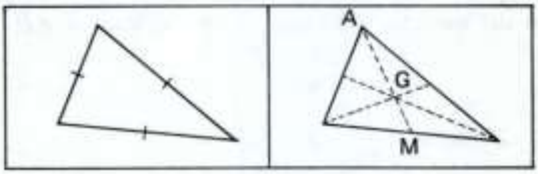
8. Desenhar um retângulo e medir as duas diagonais para descobrir que são iguais.

9. Desenhar um quadrado para descobrir que as duas diagonais são perpendiculares e bissetrizes dos ângulos.

10. Desenhar um triângulo qualquer, marcar dois pontos médios e ligá-los. Medir esse segmento para descobrir que é a metade do terceiro lado e é paralelo a ele.

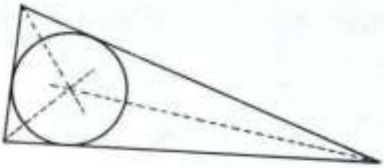


11. Desenhar um triângulo e suas três medianas encontrando o ponto onde elas se cruzam. Descobrir que cada uma delas fica dividida em duas partes em que a maior é o dobro da menor (AG = 2GM).



Uma experiência importante é descobrir que as figuras têm centro de massa. Nesta idade, muitos alunos ainda não sabem compensar largo e baixo com estreito e alto; mas, mesmo assim, as experiências são válidas como preparação. (Ver capítulo 3.)

12. Desenhar uma circunferência (a maior possível) dentro de um triângulo qualquer. Eles farão por tentativa e erro. Depois, dar a solução sistemática. Pedir para desenhar um triângulo e suas três bissetrizes, encontrando o ponto onde elas se cruzam, que é o centro da circunferência interna ao triângulo e tangente aos três lados (circunferência inscrita).

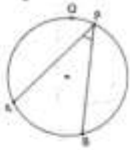


13. Desenhar uma circunferência por fora de um triângulo qualquer, passando pelos três vértices.

Deixar, primeiro, que os alunos tentem fazer a atividade sozinhos; depois, dar as instruções: desenhar um triângulo e, em cada ponto médio, traçar uma reta perpendicular ao lado (mediatriz), encontrando o ponto onde elas se cruzam, que é o centro da circunferência externa ao triângulo, passando por seus três vértices (circunferência circunscrita). Repetir com triângulo retângulo.

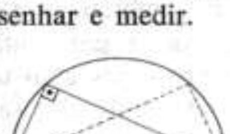
14. Refazer a atividade 30 da 3.ª série: teorema de Pitágoras.

15. Desenhar uma circunferência e marcar dois pontos *A* e *B*. A partir de outro ponto qualquer, *P*, formar o ângulo e medi-lo. Em seguida, tomar outro ponto, *Q*, e, do mesmo modo, medir o ângulo para descobrir que são iguais, não dependendo da posição de *Q*, desde que este esteja do mesmo lado que *P* em relação a *AB*.

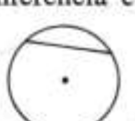


O aluno também pode descobrir que esses ângulos iguais medem metade do ângulo AOB de vértice no centro *O* (ângulo central).

16. Descobrir que, ligando um ponto qualquer de uma circunferência até as extremidades de um diâmetro qualquer, forma-se um triângulo retângulo. É só desenhar e medir.



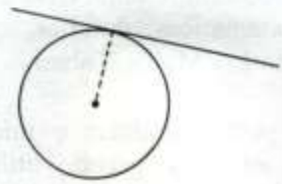
17. Traçar uma circunferência e uma corda qualquer.



Marcar o ponto médio da corda e traçar a perpendicular para descobrir que ela passa pelo centro da circunferência. Fazer depois o inverso: ligar o centro da circunferência ao ponto médio da corda para descobrir que essa reta é perpendicular à corda.

18. Traçar uma corda pequena e outra maior em uma mesma circunferência. Medir as distâncias das cordas ao centro da circunferência para descobrir que, quanto menor a corda, mais longe do centro.

19. Marcar um ponto sobre uma circunferência e traçar uma reta tangente, isto é, que apenas encosta na circunferência. Ligar esse ponto com o centro da circunferência para descobrir que é perpendicular à reta tangente.



20. Traçar duas circunferências tangentes uma à outra (apenas se encostando). Descobrir que a distância entre seus centros é igual à soma das medidas dos raios. Se forem tangentes interiormente, será a diferença entre as medidas dos raios.

21. Determinar $\pi = C \div D$. Em casa, com uma fita métrica, medir um objeto circular qualquer (disco, roda de bicicleta etc.) ao redor (C) e dividir pela medida do diâmetro (D). O resultado será sempre próximo de 3,14, sejam os objetos circulares grandes ou pequenos. Esse número chama-se *pi* (letra grega). Quanto maior a circunferência, maior será o diâmetro; assim, teoricamente, sempre se encontra o mesmo número na divisão. Na prática, como as circunferências não são bem redondas, as medidas não são exatas.

22. Refazer as atividades 21, 22 e 23 da 2.ª série.

23. Refazer as atividades 22, 23 e 24 da 3.ª série.

24. Refazer a atividade 34 da 3.ª série.

Camelidades malbatahânicas

Capítulo 6

INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos uma série extensa de situações-problemas, curiosidades matemáticas, desafios, quebra-cabeças, tudo no estilo do saudoso matemático Malba Tahan.

Para o professor, pode significar o início de uma coleção de atividades lúdicas que serão de grande utilidade para despertar o interesse do aluno pelo estudo da Matemática e tornar as aulas mais estimulantes e gostosas.

SITUAÇÕES-PROBLEMAS

Os desafios que relacionamos a seguir podem ser lançados às classes com diversas finalidades: estimular a reflexão e a criatividade, provocar debates com os pais e, por conseguinte, ensinar Matemática.

As situações podem ser colocadas em sala de aula ou em murais, jornaizinhos e outros veículos de comunicação dentro da escola. As respostas, que estão no final do capítulo, não devem ser apresentadas aos alunos. Elas irão aparecendo, circulando pela classe. Alguns problemas vão ficando para trás e voltando à discussão de vez em quando. O professor deve deixar que tudo aconteça de maneira espontânea. Podem surgir interpretações variadas e, conseqüentemente, respostas variadas. Tudo bem!

Novos exercícios desse tipó podem ser facilmente criados ou coletados em jornais e revistas quando aparecerem. Vamos a eles!

1. Botina e meia mais botina e meia, quantos pares são?

2. Qual a palavra de seis letras e 37 assentos?

3. Para emendar os cinco pedaços da corrente abaixo, quantos elos é preciso serrar?

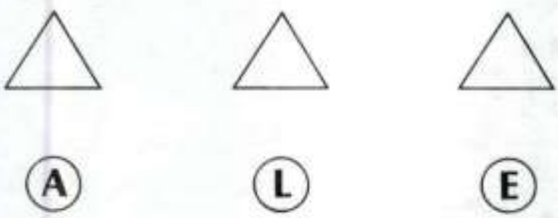
4. Com três letras é pessoa. Uma sai, quatro a ficar. Tire duas — essa é boa — ainda cinco vai restar.

5. Quanto é a metade de dois mais dois?

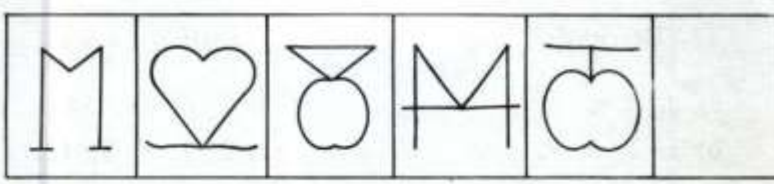
6. Colocar dez soldados em cinco filas de quatro cada uma.

7. O que sai mais barato: levar um amigo duas vezes ao cinema ou levar dois amigos uma vez?

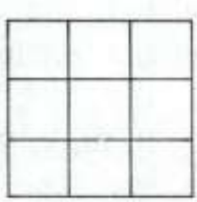
8. Ligar água, luz e esgoto nas três casas, sem cruzar a linha.



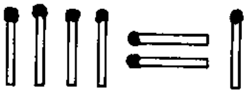
9. Qual o próximo?

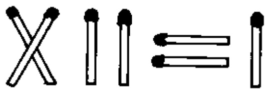


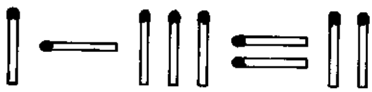
10. Quantos quadrados? Quantos triângulos?

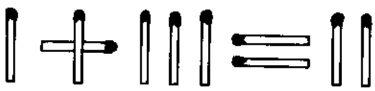


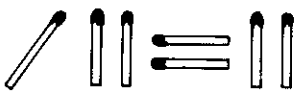
11. Mexer um palito apenas para acertar a igualdade.

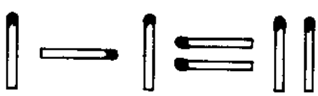
a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

12. Descobrir a regra e escrever o próximo número:

a) 2, 4, 6, 8, . . .
b) 1, 3, 5, 7, . . .
c) 3, 6, 9, 12, . . .
d) 1, 4, 7, 10, . . .
e) 2, 7, 12, 17, . . .
f) 3, 4, 7, 11, 18, . . .
g) 1, 2, 4, 7, . .
h) 3, 6, 12, 24, . . .
i) 1, 2, 4, 8, . . .
j) 2, 6, 18, 54, . . .
l) 2, 3, 5, 8, 12, . . .
m) 1, 4, 9, 25, . . .
n) 5, 5, 10, 15, 25, . . .
o) 1, 1, 2, 3, 5, 8, . . .
p) 1, 3, 6, 10, . . .
q) 1, 2, 3, 5, 7, 11, . . .
r) II, III, V, VIII, XII, . .

13. Pense um número qualquer de três algarismos. Repita ele mesmo na frente, formando um número de seis algarismos. Divida por 13; o que der divida por 11 e o que der divida por 7.

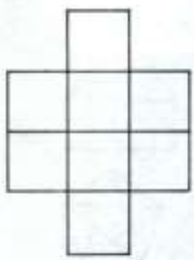
Encontrou o mesmo número. Por quê?

Exemplo: 493493 |13
37961 |11
3451 |7
493

14. Um número é a soma da idade de uma pessoa (depois do seu aniversário) com o ano em que ela nasceu. Este número é:

a) 2001 b) 1987 c) 1993 d) 2023

15. Colocar os números de 1 a 8 nos quadrinhos de modo que os números consecutivos nunca fiquem vizinhos. Inventar outros esquemas.



16. Qual o maior número, 7 ou 5?

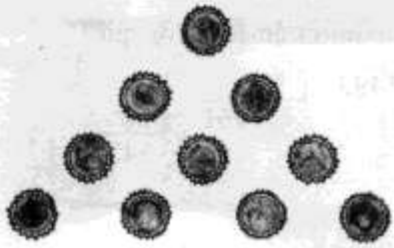
17. Qual a metade de 8?

18. Quem de vinte cinco tira, quanto fica?

19. São três garrafões de 8 litros, 5 litros e 3 litros.

O de 8 litros está cheio. Passando de um para outro, colocar exatamente 4 litros no do meio.

20. Um triângulo formado por dez tampinhas aponta para cima. Mover apenas três tampinhas para fazer o triângulo apontar para baixo.



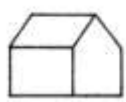
21. Com doze palitos de fósforos, formar quatro quadrados.

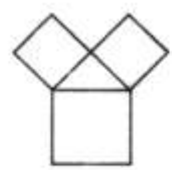
22. Formados quatro quadrados com doze fósforos, retire dois fósforos, deixando apenas dois quadrados.

23. Um gato come um rato em um minuto. Cem gatos comem cem ratos em quantos minutos?

24. Desenhar as figuras abaixo, sem tirar o lápis do papel e sem passar por cima de risco (cruzar pode):

a) 

c) 

e) 

b) 

d) 

25. Multiplicação egípcia. Os egípcios só sabiam dobrar (multiplicar por 2). Usando esse recurso, calcular 13 vezes 18.

26. Escreva os números que faltam:

a) $\boxed{\frac{2}{7}}$ $\boxed{\frac{3}{6}}$ $\boxed{\frac{1}{8}}$ $\boxed{\frac{4}{\ }}$

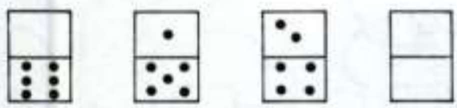
b) $\boxed{\frac{2}{3}}$ $\boxed{\frac{3}{4}}$ $\boxed{\frac{4}{5}}$ $\boxed{\frac{\ }{\ }}$

c) $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{\quad}{\quad}$

d) $\frac{8}{3}$ $\frac{12}{7}$ $\frac{16}{11}$ $\frac{\quad}{\quad}$

e) $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{\quad}{\quad}$

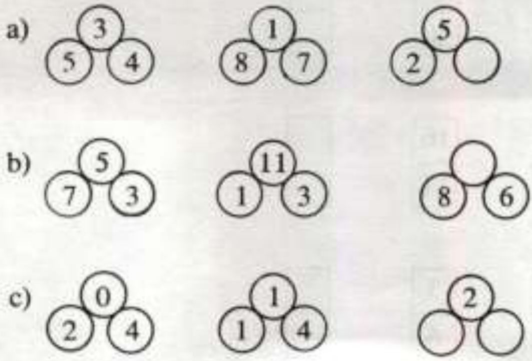
f) $\frac{1}{8}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{\quad}{\quad}$

g) 

27. Escreva os números que faltam:

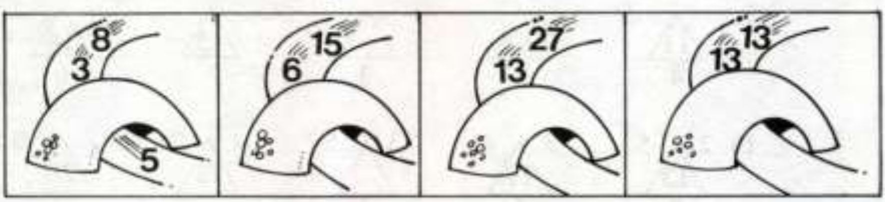
a)	2 5 / 11 / 4	3 6 / 17 / 8	5 1 / / 3	4 3 / 15 /	7 / 14 / 6
b)	2 5 / 13 / 3	3 4 / 17 / 5	3 5 / / 1	4 2 / 13 /	6 / 20 / 2
c)	3 4 / 14 / 2	5 3 / 24 / 3	6 2 / / 4	5 6 / 33 /	7 / 22 / 2
d)	7 4 / 5 / 2	11 6 / 8 / 3	13 11 / / 5	8 5 / 7 /	10 / 8 / 3

28. Escreva os números que faltam:

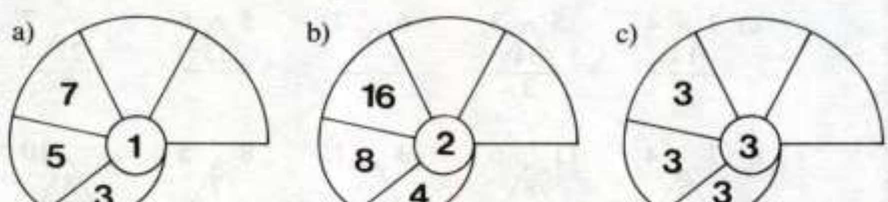


29. Escreva os números que faltam:

30. Escreva os números que faltam:

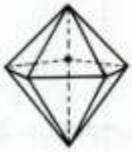


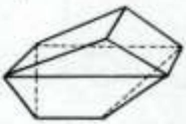
31. Escreva os números que faltam:

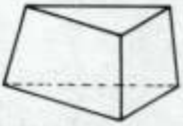


32. Quantos triângulos há em cada figura?

a) 

b) 

c) 

d) 

33. Completar:

a)  está para  assim como  está para . . .

b) $<$ está para $>$ assim como $\in$ está para . . .

c) $-$ está para $+$ assim como $\div$ está para . . .

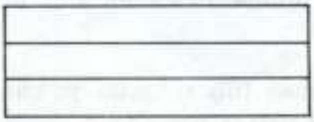
d) 3 está para 6 assim como 4 está para . . .

e) $<$ está para $\subset$ assim como $>$ está para . . .

f) 2 está para 6 assim como 3 está para . . .

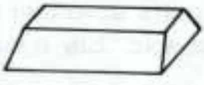
g)  está para  assim como  está para . . .

34. Olhando de cima, é assim:



— Qual das figuras abaixo corresponde à de cima?

a) 

b) 

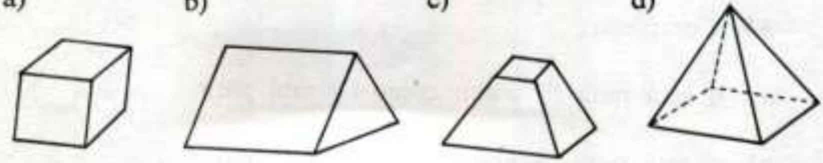
c) 

d) 

35. Olhando de cima, é assim:

— Qual das figuras abaixo corresponde à de cima?

a) b) c) d)



36. Um tijolo pesa 1 kg mais meio tijolo. Quanto pesa um tijolo e meio?

37. São nove lápis iguais, sendo que um é um pouco mais leve que os outros. Como separá-lo com apenas duas pesagens numa balança de pratos?

38. Um criminoso foi condenado à prisão perpétua. Porém, sua pena foi reduzida à metade. Como pode ser cumprida a sentença?

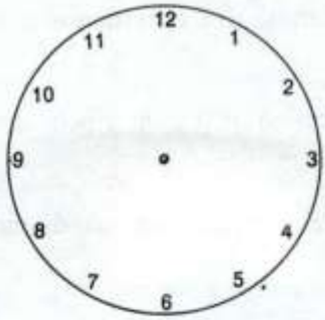
39. Numa estante existem dez livros de cem folhas cada, formando uma coleção. Uma traça estraçalhou desde a primeira folha do primeiro livro até a última folha do último livro. Quantas folhas danificou?

40. Dois pais e dois filhos foram pescar. Cada um pegou dois peixes. Qual o total de peixes pescados?

41. Um trem sai de uma estação com dezessete passageiros. Na estação seguinte desceram nove passageiros e subiram cinco, na outra desceram três e subiram onze, na outra desceram sete e subiram treze, na outra desceram oito e subiram sete. Em quantas estações parou?

42. Três rapazes, no restaurante, gastaram Cz$ 27,00, tocando Cz$ 9,00 a cada um. Cada rapaz deu uma nota de Cz$ 10,00. O garção foi ao caixa e trouxe Cz$ 5,00 de troco, pois foi feito um abatimento. Colocou Cz$ 2,00 no bolso e devolveu Cz$ 1,00 para cada rapaz. Portanto, cada rapaz pagou Cz$ 9,00, perfazendo um total de Cz$ 27,00; com mais Cz$ 2,00 do garção são Cz$ 29,00. Onde está o outro cruzado?

43.



Com dois riscos dividir o relógio em três partes, de modo que os números de cada parte tenham a mesma soma.

44. Como pode a metade de treze ser oito?

45. Qual o maior número possível de três algarismos, no qual entram somente 3, 2 e 8, sem repetir? E o menor?

46. Pensar um número. Multiplicar por 2. Adicionar 16. Dividir por 2. Subtrair o número pensado. Deu 8?

47. O que pode ser observado nestas contas?

a) $6 \times 21 = 126$

b) $3 \times 51 = 153$

c) $8 \times 86 = 688$

48. Tirando 5 de 25, quanto fica?

49. São sete velas acesas. Apaguei duas. Com quantas ficarei?

50. Uma sala tem quatro cantos, em cada canto há um gato, cada gato vê três gatos. Quantos gatos são no total? — Refazer com salas pentagonais e hexagonais para induzir o teorema do número de diagonais.

51. Num galho de árvore havia onze passarinhos. Um caçador atirou, matando quatro. Quantos ficaram?

52. O que pesa mais, 1 kg de ferro ou 1 kg de algodão?

53. Pela estrada caminhavam cinqüenta burros. O da frente olhou para trás. Quantos burros contou?

54. São quinze alunos, dez corintianos e oito japoneses. Como pode ser?

55. Escrever o número 100 com cinco algarismos iguais e com sinais de operações.

56. Trocar os asteriscos por números, de modo que a conta fique certa:

a) $\begin{array}{r} 344 \\ +\ {*}5{*} \\ \hline 6{*}2 \end{array}$

b) $\begin{array}{r} 1708 \\ +\ {*}{*}{*} \\ \hline {*}030 \end{array}$

c) $\begin{array}{r} 3{*}2 \\ -\ {*}4{*} \\ \hline 125 \end{array}$

d) $\begin{array}{r} 17 \\ \times\ {*} \\ \hline {*}1 \end{array}$

Os alunos também podem criar problemas desse tipo para o mural.

57. O que você observa nesta tabuada?

$1 \times 9 = 9$
$2 \times 9 = 18$
$3 \times 9 = 27$
$4 \times 9 = 36$
$5 \times 9 = 45$
$6 \times 9 = 54$
$7 \times 9 = 63$
$8 \times 9 = 72$
$9 \times 9 = 81$

58. a) Quantos lados tem o círculo?
b) De que lado a galinha tem mais penas?

59. Meu avô tem cinco filhos, e cada um teve outros quatro filhos. Quantos primos tenho?

60. Qual o mês do ano que tem 28 dias?

61. Os filhos do senhor Ribeiro são três rapazes e cada um tem uma irmã. No total, quantos são os filhos e filhas?

62. Um homem foi de casa até a padaria e contou, à sua direita, 23 árvores. Na volta, contou, à sua esquerda, 23 árvores. Quantas são as árvores, no total?

63. Numa horta há cinco árvores, cada árvore com seis galhos, cada galho com dois ninhos, cada ninho com três ovinhos. A Cz$ 12,00 a dúzia, quanto custa cada ovo?

64. Uma lesma está no fundo de um poço de 12 metros de profundidade. Durante o dia sobe 5 metros e, à noite, dormindo, escorrega 3 metros.

a) Quantos metros a lesma sobe por dia?

b) Depois de quantos dias chegará em cima do poço?

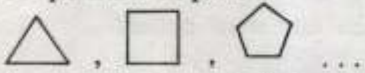
65. Um senhor tem 40 anos, e seus filhos têm 13, 11 e 8 cada um. Daqui a quantos anos a idade do homem será igual à soma das idades dos filhos?

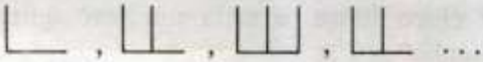
66. Como escrever 11, usando apenas três vezes o algarismo 2?

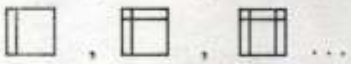
67. O senhor Ribeiro estava dando voltas no parque. Na sua frente caminhavam duas pessoas. Atrás dele, também caminhavam duas pessoas. No entanto, eles eram três. Como é possível?

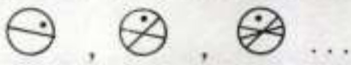
68. Qual o menor número inteiro positivo que se pode escrever com dois algarismos?

69. O que vem depois?

a) 

b) 

c) 

d) 

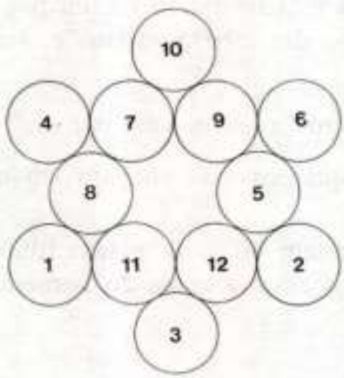
e) 

70. a) Quantas dezenas há em 32 503?

b) Qual a soma de $996 + 385 + 4$?

c) Quais os números naturais que, divididos por 3, deixam resto 2?

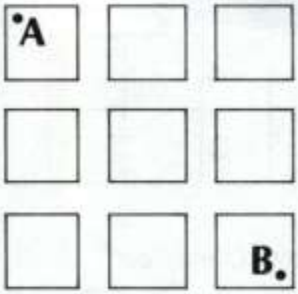
71. O que se observa nesta estrela?



72. Um avião percorreu a distância da cidade *A* até a cidade *B* em 1 hora e 20 minutos. Na volta, gastou 80 minutos com a mesma velocidade. Você sabe explicar por quê?

73. Um quadrado de 10 cm de lado foi dividido em quadradinhos de 1 cm de lado. Colocando-se todos os quadradinhos em fila, qual o comprimento da fila?

74. Você mora em A, vai à escola em B, percorrendo cada vez um caminho diferente.



Quantos caminhos diferentes existem de A até B?

75. Se meia careca tem 3 500 cabelos, quantos cabelos tem uma careca inteira?

76. III + II + I + II + III = IX. Como é possível?

77. Tirando quatro laranjas de cinco laranjas, quantas laranjas terei?

78. Adicione dois números positivos a 9 e fique com menos de 10.

79. *Dicionário*, quantas sílabas tem?

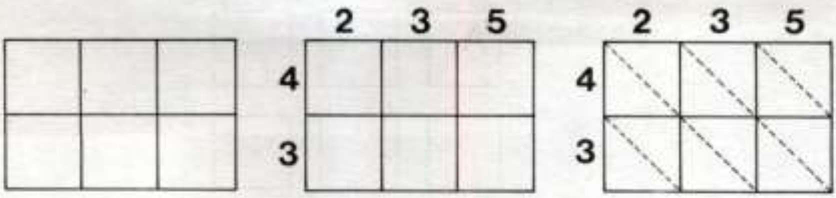
80. O rato roeu a roupa do rei. Quantos *r* tem isso?

81. O que é, o que é, tem oito letras, tira quatro, fica oito.

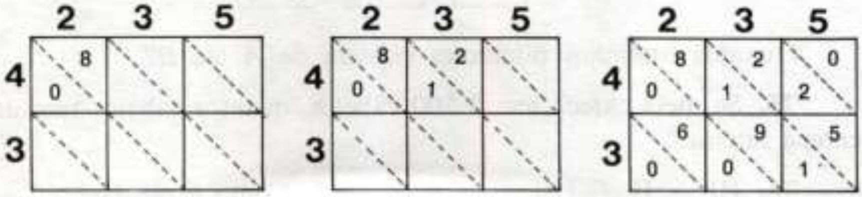
CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

1. *Multiplicação pelo método gelosia.* Foi inventado pelo matemático italiano Lucas Pacioli (1445-1514). Como exemplo, vamos multiplicar 34 vezes 235, isto é, um número de dois algarismos por um de três.

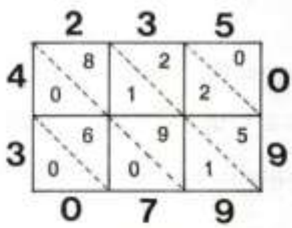
Começamos desenhando um retângulo 2 × 3. Escrevemos os números e riscamos as diagonais:



Começamos as multiplicações:

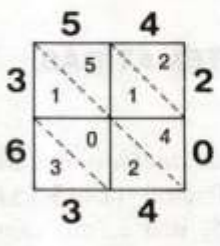


Por último, achamos as somas diagonais: $2 + 2 + 5 = 9$, $8 + 1 + 9 + 1 = 19$, vai um, $1 + 6 = 7$:



A resposta é: 7 990.

Outro exemplo: 63 × 54.



Resposta: 3 402.

2. *Multiplicação egípcia.* É feita só dobrando os números, que é o que os egípcios sabiam fazer. Por exemplo: 22×35.

1	2	4	8	16
35	70	140	280	560

Como $22 = 16 + 4 + 2$, então, $22 \times 35 = 560 + 140 + 70 = $
$= 770$.

3. *A palavra álgebra.* Um matemático árabe, Abul Chafar Mohamed Ibn-Musa Al-Kharismi, de onde vem a palavra *algarismo*, publicou, em 839, um livro chamado *Al-djabr W'al Mogabalah.*

Da expressão *Al-djabr* vem a palavra *álgebra*, que significava transporte, redução, restauração.

Essa palavra também era usada em medicina com o sentido de restauração. Às vezes, ainda se podem encontrar cartazes com as palavras: "massagista e algebrista".

4. *Multiplicações abreviadas*:

a) Números de dois algarismos:

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 12 \\ \hline 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\ \ 3 \\ \times 1 \ \ 2 \\ \hline 7\ \ 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23 \\ \times 12 \\ \hline 276 \end{array}$$

Outro exemplo:

$$\begin{array}{r} 1\ \ 3 \\ \times \ \ 1\ \ 3 \\ \hline 1\,6\,9 \end{array}$$

Outro exemplo, com reserva:

$$\begin{array}{r} 3\ \ 5 \\ \times \ \ 2\ \ 3 \\ \hline 8\,0\,5 \end{array}$$

b) Multiplicação de um número de dois algarismos por 11: basta colocar, entre os dois algarismos, a sua soma (às vezes, vai um): $35 \times 11 = 385$; $47 \times 11 = 517$.

c) Para multiplicar por 12, multiplicamos por 10, depois por 2 e adicionamos um ao outro. Isto é muito útil em nossa vida. Quanto custa uma dúzia de abacaxis se cada um custa Cz$ 8,00?
Resposta: $80 + 16 = 96$.

d) Multiplicar, por ele mesmo, um número terminado em 5 (isto é, elevar ao quadrado um número terminado em 5): basta multiplicar o número de dezenas pelo sucessor e colocar 25 na frente.

Exemplos:

- $35 \times 35 \rightarrow 3 \times 4 = 12$. Resposta: 1 225.
- $65 \times 65 \rightarrow 6 \times 7 = 42$. Resposta: 4 225.

(O resultado sempre termina em 25.)

5. *A letra grega π (pi)*. A razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro é um número representado pela letra grega π (pi). É uma dízima não periódica:
$\pi = 3{,}141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279\ 502\ 884\ 197\ 169\ 399\ldots$
π é um número irracional cujos dez primeiros algarismos podem ser memorizados com a frase: "Vai à aula o aluno apreender um número usado nas artes". Cada palavra dá um algarismo, contando suas letras. Outra frase que dá o mesmo resultado é: "Sou o medo e temor constante do aluno vadio, bem vadio".

Porém, nunca teremos necessidade de dez decimais. Na prática, arredondamos para 3,1416 ou, menos ainda, 3,14.

6. *O símbolo !*. Em Matemática, não significa admiração, mas sim *fatorial*, isto é, uma multiplicação começando do 1 até o número dado.

Por exemplo:

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$

Calcule: 4!, 6!, 2!

Simplifique: $\dfrac{6!}{4!}$

7. *A lenda do xadrez.* Diz uma velha lenda que o inventor do jogo de xadrez foi o grão-vizir Sissa Ben Dahir, que o fez para recreação do rei da Índia, Shirlâm. O rei, muito satisfeito, mandou Sissa escolher, como pagamento, o que bem desejasse. O grão-vizir pediu um grão de trigo para a primeira das 64 casas do tabuleiro de xadrez, dois grãos para a segunda, quatro para a terceira, oito para a quarta e assim por diante, dobrando cada casa até chegar à 64.ª, cobrindo todo o tabuleiro.

O rei admirou-se! Oferecera tudo, e Sissa pedia apenas um punhado de grãos de trigo! Chamou os matemáticos da corte, mandou calcular e pagar ao inventor.

Os cálculos começaram a ficar demorados, o rei ficava impaciente e só no dia seguinte os matemáticos apresentaram o resultado: nem plantando em todos os continentes e secando os mares para formar lavouras, poderia ser pago o pedido do inventor.

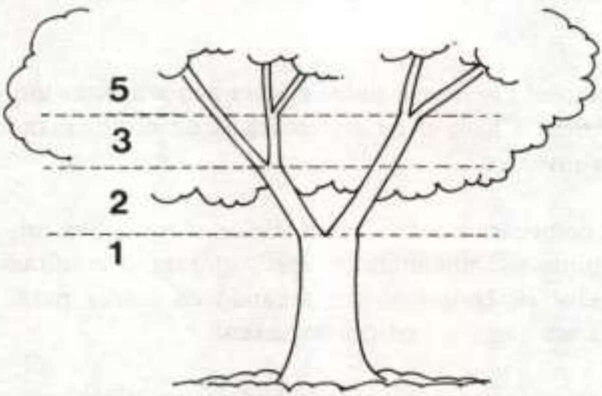
O rei, assombrado, pediu a cifra e os matemáticos escreveram: 18 446 744 073 709 551 615, que é obtida com a progressão geométrica $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{63} = 2^{64} - 1$.

Como 1 metro cúbico de trigo contém perto de 15 milhões de grãos, então a recompensa seria perto de 12 000 000 000 000 m³. Se o celeiro tivesse 4 metros de altura por 10 metros de largura, seu comprimento passaria muito além do Sol!

8. *As frações.* No início deste livro, vimos que os egípcios representavam o *três* por $|||$ e o *um terço* por $\overset{\circ}{|||}$. Aquela oval sobre o três significava *um pão*, logo $\overset{\circ}{|||}$ significava ***um pão para três pessoas***, isto é, um terço de pão. Um doze avos de pão era representado por $\overset{\circ}{\cap}\,||$. Este é um dos mais antigos meios de se representar uma fração e continua essencialmente o mesmo até hoje! Na Grécia e em Roma, usava-se um sistema um pouco diferente. Foi no início do Renascimento que o matemático italiano Leonardo de Pisa, o Fibonacci (filho do Bonacci), começou a usar o traço separando a quantidade do número de partes. Assim, as frações assumiram a forma atual.

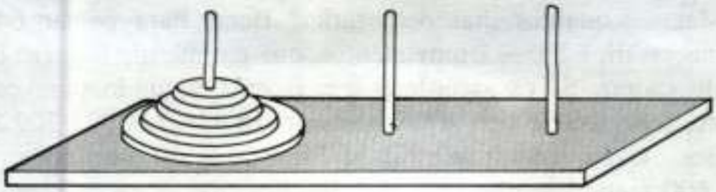
9. *Seqüência de Fibonacci.* Fibonacci inventou uma seqüência apenas curiosa: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . ., onde a soma de dois números consecutivos é o próximo: $3 + 5 = 8$, $5 + 8 = 13$ etc.

Muito tempo depois, começaram a surgir várias utilidades para elas. A mais curiosa foi na arte: os pintores começaram a pintar árvores com números de galhos na seqüência de Fibonacci.



O tronco se bifurca, formando dois galhos. Os dois galhos não se bifurcam juntos. Um vai primeiro, ficando três galhos. Agora é um problema de probabilidade: o galho que não se bifurcou possui mais probabilidade de bifurcação que os outros dois, mas estes, por serem dois, acabam sofrendo uma bifurcação, e o número cinco é o mais provável. E assim por diante.

10. *Torre de Hanói.* No desenho a seguir, vemos quatro discos (arruelas) na primeira haste. Elas devem ser passadas para a terceira haste, de uma em uma, podendo-se usar a segunda, mas nunca ficando disco maior por cima de menor.



É claro que, com maior número de àrruelas, o jogo fica mais difícil.

O jogo pode ser feito com moedas, sem hastes, marcando três lugares.

Se a torre de Hanói possui apenas um disco, ele pode ser passado para a terceira haste com apenas um movimento. Se a torre possui dois discos, os movimentos serão os seguintes:

Portanto, com dois discos são três movimentos; com três discos serão sete movimentos e assim por diante, segundo a tabela:

1	2	3	4	5	6	...
1	3	7	15	31	63	...

A regra é a seguinte: com cinco discos, o número de movimentos é: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1 = 32 - 1 = 31$, isto é, em geral, com n discos teremos $2^n - 1$ movimentos.

Há uma lenda envolvendo esse jogo: em Benares — o centro do mundo — há um templo budista onde, na sala principal, estão vários sacerdotes jogando a "torre de Hanói" noite e dia, sem parar. A base é de prata, as hastes são de diamantes e os discos são de ouro, num total de 64. Quando Brama criou o mundo, colocou no Templo de Benares essa torre de Hanói com 64 discos e determinou aos sacerdotes que passassem os discos, sem parar, para a terceira haste, segundo a regra dos menores por cima. O fim do mundo se dará quando for passado o último disco. E desde então os sacerdotes estão cumprindo a determinação, sem parar, substituídos uns pelos outros, dia e noite.

Mas... quantos dias demorarão? Bem! Para passar 64 discos serão necessários $2^{64} - 1$ movimentos, que é o mesmo número do tabuleiro de xadrez. Se os sacerdotes gastarem 1 segundo para cada movimento, sem parar e sem errar, gastarão 18 446 744 073 709 551 615 segundos. Cada ano tem $365 \times 24 \times 60 \times 60$ segundos, isto é, 3 153 600 segundos; dividindo, concluímos que os sacerdotes gastarão 584 942 417 355 anos para passar todas as peças. São mais de 500 bilhões de anos! A Terra tem somente cerca de 5 bilhões de anos!

11. *Quantos avós*? Cada um de nós tem dois pais, quatro avós, oito bisavós, dezesseis tataravós etc. (se não houve casamento consangüíneo). A quantidade vai dobrando, digamos, a cada 25 anos para o passado. E se voltarmos no tempo 1 600 anos? Como $1\,600 = 64 \times \times 25$, teríamos de dobrar 64 vezes, isto é, 2^{64} tatata...taravôs, que equivale a 18 446 744 073 709 551 616. Esse número de pessoas daria para povoar bilhões de planetas Terra!

12. *"Quem parte e reparte fica com a maior parte"*. Dois beduínos viajavam em um único camelo que poderia não suportar, com peso dobrado, a viagem pelo deserto. Chegaram a um oásis onde três irmãos brigavam para dividir 35 camelos deixados como herança. Um dos beduínos viajantes, que era matemático, pediu licença para tentar resolver o problema. O falecido pai dos rapazes havia deixado 35 camelos para dividir pelos três, de modo que o primeiro ficasse com a metade, o segundo com um terço e o caçula, com um nono.

A discórdia se estabelecera pela impossibilidade de se retirar a metade de 35 camelos, bem como um terço e um nono. O matemático misturou seu próprio camelo com os 35, ficando 36. Deu metade para o primeiro que, recebendo 18 ao invés de 17,5, ficou muito satisfeito e se retirou. Deu um terço para o segundo que, com 12, saiu ganhando. Finalmente, deu 4 para o caçula que também ficou muito satisfeito. Os três irmãos se retiraram com seus 34 camelos ($18 + 12 + 4$), sobrando 2, um para o matemático e outro para o companheiro de viagem.

13. *Você sabia que...*

- $1 + 2 + 3 = 1 \times 2 \times 3$?
- Dando um nó em uma tira de papel, formaremos um pentágono?

- No Brasil, 1 bilhão vale 1 000 milhões, mas há países em que ele vale *1 milhão* de milhões?

- Quando ampliamos uma foto, os comprimentos das coisas ficam aumentados, mas não as medidas dos ângulos?

- Multiplicando 142 857 por qualquer número de 1 a 6, o resultado é formado pelos mesmos algarismos em outra ordem?

- Os números ímpares eram considerados machos e os pares, fêmeas?

- $4 \times 1\,963 = 7\,852$, onde aparecem todos os algarismos?

- Para dar uma volta ao redor da Terra, teríamos de andar 40 000 km?

- Um dos maiores matemáticos foi Euler, que continuou criando Matemática mesmo depois de cego?

- Que um número é chamado *perfeito* se é igual à soma dos seus divisores, e que o 6 é o menor número perfeito ($6 = 1 + 2 + 3$)?

- O sinal $+$ é, provavelmente, corruptela da conjunção latina *et*?

- O sinal $-$ pode ter tido origem no risco que os comerciantes medievais usavam para indicar diferenças nos pesos das mercadorias?

- O sinal $\times$ já era usado em 1647 e é atribuído a W. Oughtred?

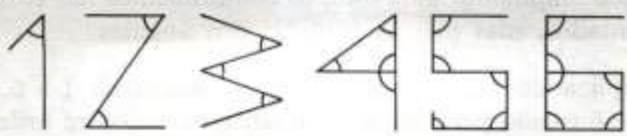
- O sinal $\div$ deve ter-se originado da própria notação de fração, um traço com o numerador e o denominador?

- O símbolo π, para o número 3,14159. . ., é uma letra grega que começou a ser usada perto de 1700 na Inglaterra?

- O sinal $=$ foi utilizado pela primeira vez por Robert Record em 1542 na Inglaterra?

- Multiplicando 37 por 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 ou 27, obtemos um produto de três algarismos iguais cuja soma é o multiplicador?

- Alguém inventou uma história — que não corresponde à realidade — que os números teriam sido formados contando ângulos?



- Um dos maiores matemáticos brasileiros foi Joaquim Gomes de Souza — o Souzinha — que nasceu no Maranhão em 15 de fevereiro de 1929 e morreu em Londres, com 34 anos de idade, deixando inúmeros trabalhos?

- É muito difícil dizer depressa: um tigre, dois tigres, três tigres?

- Para calcular $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + 200$, pegamos a média do primeiro com o último e multiplicamos por 200? Assim:

  $\frac{1 + 200}{2} \times 200 = 20\,100$. Isso vale para qualquer quantidade de números: 300, 315 etc.

RESPOSTAS DAS SITUAÇÕES-PROBLEMAS

(Se o aluno descobrir uma resposta diferente das apresentadas abaixo, tudo bem, desde que tenha alguma lógica.)

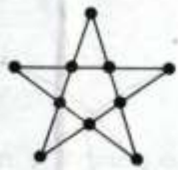
1. Dois pares (um de botina e um de meia) ou então um par de botina mais uma botina (meia mais meia).

2. Ônibus.

3. Três elos. Abrir os três elos do primeiro pedaço e cada elo aberto engancha dois dos quatro pedaços.

4. IVO, IV, V.

5. A metade de dois mais dois é o mesmo que a metade de 4, é 2. Mas a metade de 2, mais 2, é 1 mais 2, isto é, três. Há duas respostas certas.

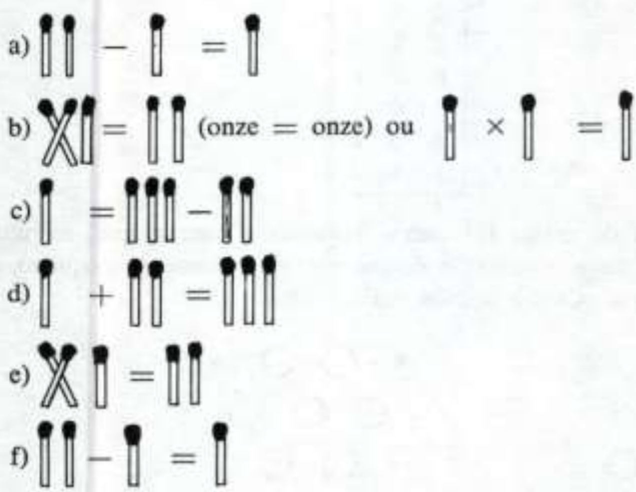
6. 

7. Levar dois amigos uma vez.

8. Sem solução, no plano. Nunca dizer isso aos alunos.

9. Basta cobrir a metade esquerda de cada desenho para ver que o próximo deve ser . Veja, separando as metades: ↾1, Ƨ2, Ƹ3 . . . São os algarismos.

10. Catorze quadrados, cinco triângulos. Pode-se aumentar os desenhos e fazer mais divisões.

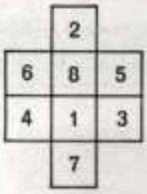
11. 

12. a) 10 b) 9 c) 15 d) 13 e) 22 f) 29 g) 11 h) 48 i) 16 j) 162 l) 17 m) 36 n) 40 o) 13 p) 15 q) 13 (números primos) r) XVII.

13. Porque $13 \times 11 \times 7 = 1\,001$ e multiplicar um número de três algarismos por 1 001 é repeti-lo em seguida.

14. O ano em que estamos. Teste com a sua idade.

15.



16. 7.

17. O aluno dirá 4; mas, se estivermos falando do numeral 8, a resposta pode ser 3 ou 0. Isso porque podemos cortar o numeral na metade assim ou assim.

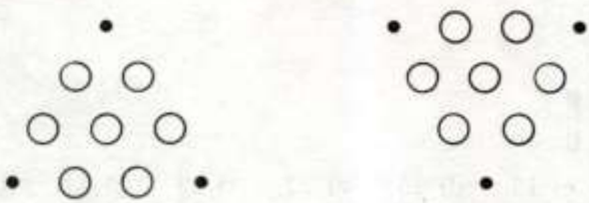
18. 15.

19. A primeira situação é 8, 0, 0, isto é, 8 litros num garrafão e zero nos outros dois. Agora, vamos encher o garrafão do meio, ficando 3, 5, 0. Assim, vamos tentando. Uma solução é:

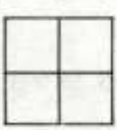
8	0	0
3	5	0
3	2	3
6	2	0
6	0	2
1	5	2
1	4	3

ficando 4 no do meio. Há outras soluções. Observe que, na última passagem, pegamos o garrafão do meio e completamos o pequeno, que já tinha 2 litros. Coube apenas mais 1 litro.

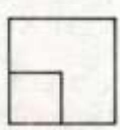
20.



21.



22.

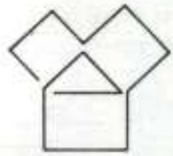


23. Um minuto. Cada um come o seu.

24. a) 

d) 

b) 

e) 

c) sem solução.

25.

1	2	4	8 ...
18	36	72	144 ...

$13 = 1 + 4 + 8$, logo, $13 \times 18 = 18 + 72 + 144 = 234$.

26.

a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
4	5	8	20	4	4	
5	6	16	15	8	5	

27. a) 9, 8, 1
b) 16, 5, 3
c) 32, 3, 4
d) 7, 4, 15

28. a) $2 \times 3 - 1 = 5$
$2 \times 5 - 8 = 2$
$2 \times 4 - 7 = 1$
b) $5 + 11 = 16$
c) $0 + 2 \times 1 = 2$
$2 + 2 \times 1 = 4$
$4 + 2 \times 4 = 12$

29. 19, 11, 6.

30. 9, 14, 0.

31. a) 9, 11 b) 32, 64 c) 3, 3

32. a) 4 b) 10 c) 4 d) 2

33. a)  b)  c) x d) 8 e)  f) 9 g) 

34. b)

35. d)

36. 3 kg

37. Separar os lápis em três grupos de três.

- Primeira pesagem: três lápis em um prato e três no outro. Se der igual, o mais leve está com os outros. Se der desigual, o mais leve está no prato que subiu. De qualquer forma, já isolamos três.

- Segunda pesagem: um lápis em um prato e um no outro.
  Se der igual, o mais leve é o outro. Se der desigual, o mais leve fica também determinado.

38. Um dia preso, outro solto.

39. 802.

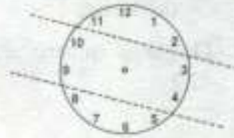
Perfurou todas as folhas dos oito livros do meio, mais a primeira folha do livro 1, que fica à direita do livro, mais a última folha do livro 10, que fica à esquerda.

40. $3 \times 2 = 6$. Eram um menino, o pai e o avô.

41. Esse problema é apenas uma brincadeira que induz o aluno a ficar somando passageiros quando há inúmeras coisas a observar. Só podemos começar a resolver depois que for feita a pergunta.

42. Esse problema é interessante, pois mostra que as contas não podem ser feitas atabalhoadamente. É preciso que haja um objetivo. Por exemplo: queremos saber onde estão os Cz$ 30,00? Estão Cz$ 25,00 no caixa, Cz$ 3,00 nos bolsos dos rapazes e Cz$ 2,00 com o garção. Não há motivo para adicionar, como no problema, os Cz$ 27,00 pagos com os que ficaram com o garção. Haveria motivo para subtrair! Cz$ 27,00 pagos menos os Cz$ 2,00 que ficaram com o garção são os Cz$ 25,00 que estão no caixa.

43.



44. ~~XIII~~ → VIII. É só pegar a metade de cima.

45. 832 e 238.

46. Um número: x
Multiplicar por 2: $2x$
Adicionar 16: $2x + 16$
Dividir por 2: $\dfrac{2x + 16}{2} = \dfrac{2x}{2} + \dfrac{16}{2} = x + 8$
Subtrair x: $x + 8 - x = 8$

47. 6×21, de trás para frente: 126.

48. 2.

49. Com duas; as outras serão consumidas.

50. Quatro.

51. Nenhum. Os outros voaram.

52. Pesam o mesmo: 1 kg. Qual você quer que caia sobre seu pé?

53. Nenhum. Burro não sabe contar.

54. Há três alunos que são japoneses e corintianos.

55. $111 - 11$ ou $3 \times 33 + \dfrac{3}{3}$ ou $5 \times 5 \times 5 - 5 \times 5$.

56. a) $\begin{array}{r} 344 \\ +258 \\ \hline 602 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 1\,708 \\ +\ 322 \\ \hline 2\,030 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 372 \\ -247 \\ \hline 125 \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 3 \\ \hline 51 \end{array}$

57. As dezenas crescem e as unidades decrescem, de modo que, em cada número, a soma é sempre 9.

58. a) Dois: o de dentro e o de fora.
b) Lado de fora.

59. Dezesseis. Os irmãos não são primos.

60. Todos possuem 28 dias, ou mais.

61. $3 + 1 = 4$.

62. 23. As 23 da direita estarão à esquerda na volta.

63. Cz$ 1,00.

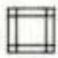
64. a) 2 metros.
b) Cinco dias, pois, depois de quatro dias, subiu 8 metros e, no dia seguinte, subindo 5 metros, atinge a borda, mesmo que escorregue de noite.

65. Daqui a quatro anos.

66. $\frac{22}{2}$.

67. O caminho era circular.

68. Todos dizem 10; no entanto, é a unidade escrita como $\frac{1}{1}$ ou $\frac{2}{2}$ etc.

69. a)  b)  c)  d)  e) 

70. a) 3 250.
b) 996 + 4 = 1 000, logo, a soma é 1 385, de cabeça.
c) 2, 5, 8, 11, 14, . . .

71. A soma é sempre 26, inclusive a das seis pontas.

72. 80 minutos é o mesmo que 1 hora e 20 minutos.

73. 10 × 10 = 100, ou seja, 1 metro.

74. Esse problema pode ser resolvido por contagem, riscando todos os caminhos, ou usando o triângulo de Tartaglia-Pascal. Para nove quarteirões, teremos:

```
      1
    1   1
  1   2   1
1   3   3   1
  4   6   4
   10  10
     20
```

Resposta: Vinte caminhos.
Se fossem dezesseis quarteirões, teríamos setenta caminhos.

75. Nenhum.

76. Visto no espelho.

77. 4.

78. $9 + \frac{1}{2}$. Na verdade, estamos somando apenas um número: $\frac{1}{2}$.

79. O dicionário tem 237 597 sílabas. Se duvidar, confira.

80. Isso não tem r!

81. Biscoito.

Bibliografia

(As obras assinaladas com asterisco poderiam fazer parte da biblioteca sugerida no capítulo 3, Laboratório de Matemática.)

AEBLI, Hans. *Prática de ensino*. São Paulo, EPU/Edusp, 1982.

*ALMEIDA, Paulo N. *A explosão recreativa dos jogos*. São Paulo, Estrutura, 1982.

BECHARA, L. S. e LIBERMAN, M. P. *Curso moderno de Matemática* (GRUEMA). São Paulo, Nacional, 1977.

BERNAL, V. D. *Historia social de la ciencia*. Barcelona, Peninsula, 1973.

*BEZERRA, Jairo. *Vamos gostar de Matemática*. Rio de Janeiro, Philobiblion, 1985.

BLOOM, B. S. et al. *Taxionomia dos objetivos educacionais*. Porto Alegre, Globo, 1977.

*BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo, Edgard Blucher, 1974.

BRASIL, Luiz A. S. *Aplicações da teoria de Piaget ao ensino da Matemática*. Rio de Janeiro, Forense/Universitária, 1977.

DIENES, Zoltan P. *As seis etapas do processo de aprendizagem em Matemática*. São Paulo, EPU/MEC, 1975.

*GARDNER, Martin. *Divertimentos matemáticos*. São Paulo, Ibrasa, 1961.

*HOGBEN, Lancelot. *Maravilhas da Matemática*. Porto Alegre, Globo, 1958.

*KARLSON, Paul. *A magia dos números*. Porto Alegre, Globo, 1961.

*KASNER, Edward. *Matemática × imaginação*. Rio de Janeiro, Zahar, 1976.

KOTHE, S. *Pensar é divertido*. São Paulo, EPU, 1977.

LIBERMAN, M. P. e WEG, R. L. *Fazendo e compreendendo Matemática*. São Paulo, Solução, s. d.

MENNINGER, K. *Number words and number symbols*. Massachusetts-EUA, M.I.T. Press, 1970.

*PERELMAN, Y. I. *Álgebra recreativa.* Moscou, Editorial MIR, 1959.

—. *Brincando de Matemática.* Moscou, Editorial MIR, 1960.

—. *Matemáticas recreativas.* Moscou, Editorial MIR, s./d.

—. *Problemas y experimentos recreativos.* Moscou, Editorial MIR, 1975.

PIAGET, J. *Fazer e compreender.* São Paulo, Melhoramentos, 1978.

—. *Seis estudos de Psicologia.* Rio de Janeiro, Forense/Universitária, 1985.

— e INHALDER, B. *Gênese das estruturas lógicas elementares.* Rio de Janeiro, Zahar, 1975.

—. *O desenvolvimento das quantidades físicas na criança.* Rio de Janeiro, Zahar, 1975.

PIAGET, J. e SZEMINSKA, A. *A gênese do número na criança.* Rio de Janeiro, Zahar, 1971.

PILETTI, Cláudio. *Didática especial.* São Paulo, Ática, 1986.

*ROSA NETO, Ernesto. *O jogo do vadião.* São Paulo, Alfa-Ômega, 1985.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO. *Subsídios para a implementação do guia curricular de Matemática* — 1.º grau. São Paulo, CENP, 1977.

*SOLOMON, Charles. *Matemática* (Série Prisma). São Paulo, Melhoramentos, 1975.

*TAHAN, Malba. *A Matemática na lenda e na História.* Rio de Janeiro, Bloch, 1974.

—. *Antologia da Matemática.* São Paulo, Saraiva, 1960.

—. *As maravilhas da Matemática.* Rio de Janeiro, Bloch, 1972.

—. *O homem que calculava.* Rio de Janeiro, Bloch, 1973.

Impresso por
W. Roth & Cia. Ltda.

A editora ática no Brasil

ACRE
Av. Ceará, 1.240
Tel.: (068) * 224-4540 - **Rio Branco**

ALAGOAS
Rua Cons. Lourenço Albuquerque, 197
(antiga Rua Boa Vista)
Rua Joaquim Távora, 18/260
Tels.: (082) * 221-2451, 221-7461, 221-8007 e 223-3097 - **Maceió**

AMAZONAS
Rua Henrique Martins, 403
Telex: 092 - 2471 - CECI-BR
Tels.: (092) * 234-1661 e 234-1608 - **Manaus**

BAHIA
Rua Waldemar Falcão, 1.602
Bairro Rio Vermelho
Telex: 071 - 3239 - DLBH-BR
Tels.: (071) * 247-4000 e 235-7003 - **Salvador**

CEARÁ PIAUÍ
Rua Floriano Peixoto, 1.316/21 - CP 474
Tels.: (085) * 226-6610 e 226-6611 - **Fortaleza**

DISTRITO FEDERAL
S. I. Gráficas - Quadra 1, 725 - CP 142.193
Tels.: (061) * 223-7686 e 224-0016 - **Brasília**

ESPÍRITO SANTO
Rua Duque de Caxias, 115
Tels.: (027) * 223-6066 e 222-2207 - **Vitória**

GOIÁS
Rua 70, 379 - Setor Central - CP 10.695
Tels.: (062) * 223-6029 e 225-8847 - **Goiânia**

MARANHÃO
Rua Joaquim Távora, 353 - C.P. 396
Telex: 098 - 2587 - CYMA-BR
Tels.: (098) * 222-5454, 222-0107, 221-4506, 221-3904 e 222-6386 - **São Luís**

MATO GROSSO
Rua Almirante Pedro Alvares Cabral, 132
Jardim Cuiabá - CP 604
Tel.: (065) * 321-0185 - **Cuiabá**

MATO GROSSO DO SUL
Rua Pedro Celestino, 2.356
Tel.: (067) * 382-5822 - **Campo Grande**

MINAS GERAIS
Rua Carlos Turner, 374
Bairro Silveira
Tel.: (031) * 467-1144 - **Belo Horizonte**
Galeria Pio X, 63/71/75
Rua Halfeld, 116
Tel.: (032) * 212-3097 - **Juiz de Fora**
Rua Delfim Moreira, 245 - Centro
Tel.: (035) * 221-6671 - **Varginha**
Rua Floriano Peixoto, 83
Tel.: (016) * 634-7541 (PABX) - **Ribeirão Preto**
(para o **Triângulo Mineiro**)

PARÁ AMAPÁ
Rua dos Tamoios, 1.592
Tels.: (091) * 222-7369 e 223-0528 - **Belém**

PARAÍBA
Rua da Areia, 578 - Centro
Tel.: (083) * 221-0958 - **João Pessoa**

PARANÁ
Rua Voluntários da Pátria, 205
Telex: 041 - 5591 - LLDC-BR
Tel.: (041) * 223-6207 - **Curitiba**
Rua Porto Alegre, 466
Tels.: (0432) * 23-4277 e 23-4845 - **Londrina**

PERNAMBUCO RIO GRANDE DO NORTE
Rua Corredor do Bispo, 185
Bairro Boa Vista
Tels.: (081) * 222-4276, 231-0990 e 231-3091 - **Recife**

RIO DE JANEIRO
EDITORA ÁTICA S.A.
Rua Barão de Ubá, 173
Bairro Praça da Bandeira
Telex: 021 - 30915 - EDAT-BR
Tel.: (021) * 273-1967 - **Rio de Janeiro**
Rua Caldas Viana, 42
(Prolongamento P. Saldanha Marinho)
Tels.: (0247) * 22-3034 e 23-5634 - **Campos**

RIO GRANDE DO SUL
EDITORA ÁTICA S.A.
Av. Ceará, 1.360 - CP 2.373
Tels.: (0512) * 43-1116 - Publicidade
43-7680 - Vendas - **Porto Alegre**

RONDÔNIA
Porto Velho

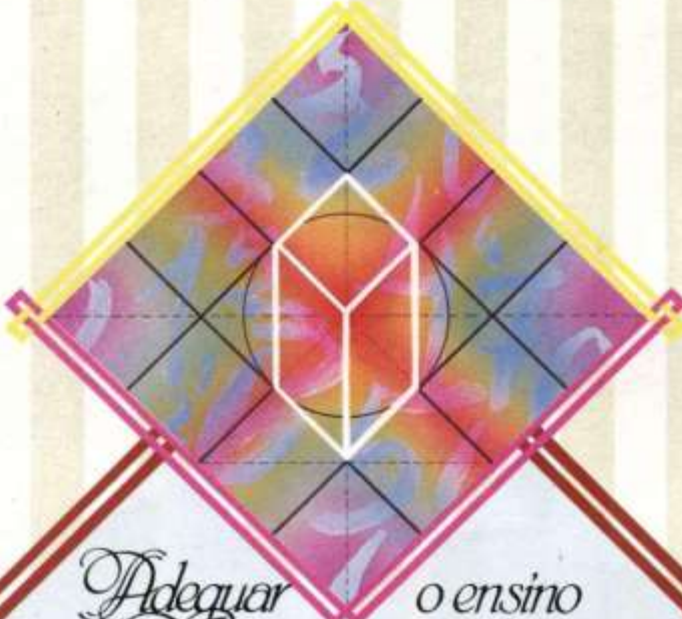
SANTA CATARINA
Rua Conselheiro Mafra, 47 - CP 785
Tel.: (0482) * 22-4795 (PBX) - **Florianópolis**

SÃO PAULO
Av. Sete de Setembro, 271-A
Tel.: (0162) * 32-2711 - **Araraquara**
Av. Aureliano Cardia, 836
(Alameda) Centro
Tel.: (0142) * 22-4587 - **Bauru**
Praça Mário Peixoto, 41 - CP 131
Tel.: (0143) * 22-4085 - **Ourinhos**
Rua Washington Luiz, 116 - CP 95
Tel.: (0182) * 22-1447 - **Presidente Prudente**
Rua Floriano Peixoto, 83
Tel.: (016) * 634-7541 (PABX) - **Ribeirão Preto**
Av. Campos Sales, 112/114
Tel.: (0132) * 32-8517 - **Santos**
Rua Oswaldo Aranha, 1402
Tel.: (0172) * 32-2405 - **São José do Rio Preto**
EDITORA ÁTICA S.A.
Rua Barão de Iguape, 110
Telex: 011 - 32969 - EDAT-BR
Tel.: (011) * 278-9322 (PABX) - **São Paulo**

SERGIPE
Rua das Laranjeiras, 35
Tel.: (079) * 224-1805 - **Aracaju**

---

* Código DDD



Adequar o ensino da Matemática ao estágio de desenvolvimento intelectual em que se encontra a criança é a marca distintiva desta Didática da Matemática.

ISBN 85 08 01922 x